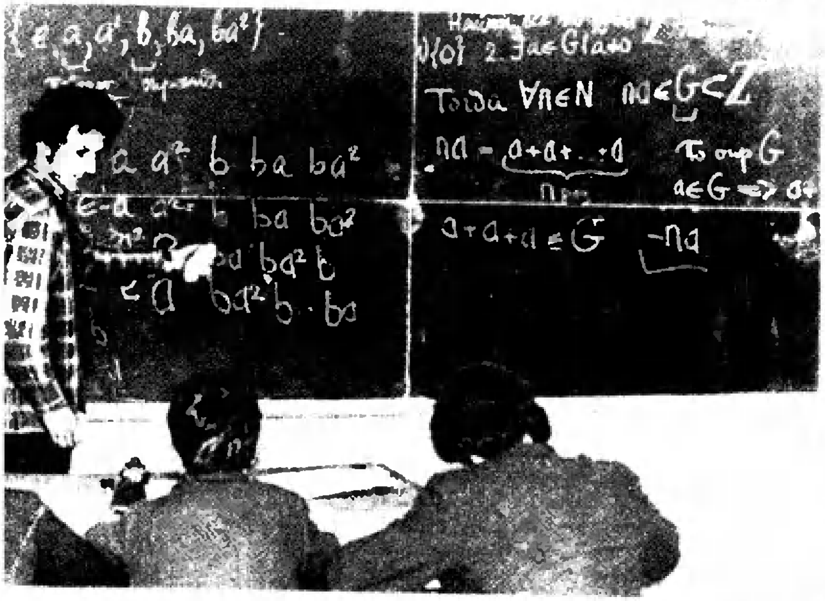
Квант

1974

8

Научно-популярный физико-математический журнал



Физико-математической школе при МИИТе — 5 лет

Да, уже 5 лет работает ФМШ МИИТа. О конференции, посвященной этому событию, рассказано в статье В. И. Каплуна (см. с. 56—58). Помещенные здесь фотографии знакомят вас с атмосферой на занятиях ФМШ.

● Лекцию по физике учащимся 9 классов читает В. Д. Козлов.

● Андрей Кутьин на занятиях по математике с учащимися 8 класса.

● Гриша Кацман читает лекцию по математике учащимся 10 класса.

Основан в 1970 году

Квант

1974

8

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На 1-й с. обложки помещен рисунок, показывающий, как строится «ковер Серпинского» (рис. С. Ф. Лухина). Если в центре квадрата вырезать в 3 раза меньший квадрат, в оставшихся (по краям) 8 квадратах опять вырезать в 3 раза меньшие квадраты и так до бесконечности, то останется множество точек, которое является линией — множеством (на плоскости) размерности 1. Подробно об определении понятия размерности точечных множеств, предложенном П. С. Урысоном, рассказано в статье академика П. С. Александрова (см. с. 3).

4-я с. обложки — рис. Э. В. Назарова.

Павел Самуилович Урысон (1898—1924)

П. С. АЛЕКСАНДРОВ

ПАВЕЛ САМУИЛОВИЧ УРЫСОН

К ПЯТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ СМЕРТИ

В статье академика Павла Сергеевича Александрова рассказывается о жизни и работах выдающегося советского математика — Павла Самуиловича Урысона. К сожалению, чтобы почувствовать, какого масштаба был этот математик, суметь оценить значение и важность полученных им результатов, нужно знать гораздо больше, чем изучается в школе, в частности, нужно знать, что такое топология, и быть знакомым с основными понятиями теории множеств. По-видимому, с большинством из этих понятий вы встретитесь в этой статье впервые, поэтому, в своей математической части статья, безусловно, трудная; при первом чтении, вероятно, эту часть целесообразно пропустить. В то же время подготовленный и вдумчивый читатель сможет найти в этой статье очень много интересных и полезных сведений, получив представление о том, чем занимается современная топология. Такому читателю мы советуем, прежде чем приступить к подробному разбору этой статьи, познакомиться с основными определениями и результатами теории множеств. Найти все это можно, например, в прекрасных и достаточно элементарных книгах П. С. Александрова «Введение в теорию функций действительного переменного», П. С. Александрова и П. С. Урысона «Мемуар о компактных топологических пространствах» и А. С. Пархоменко «Что такое линия». Кроме того, в этом же номере журнала мы публикуем статью М. С. Торонджадзе, А. Д. Беидукидзе «Кривые Пеано», рассказывающую об истории определения понятия линии.

17 августа 1974 года исполняется пятьдесят лет со дня смерти одного из самых талантливых советских математиков П. С. Урысона.

Павел Самуилович Урысон родился 3 февраля 1898 года в Одессе. Его большие способности проявились еще в детские годы: ученье ему давалось легко и широкая его любознательность сказалась и в отношении естественных наук (главным образом физики и химии), и в отношении математики, а также языков и литературы. Блестяще окончив в 1915 году московскую частную гимназию П. Н. Поповой, он в том же году поступил в Московский университет на физико-математический факультет, причем предполагал стать физиком. На его выдающиеся способности очень рано обратил внимание П. П. Лазарев, который содействовал преодолению препятствий полицейски-бюрократического характера, возникших при поступлении П. С. Урысона в университет. Под руководством П. П. Лазарева была сделана первая научная работа Павла Самуиловича, она называлась «О радиации трубки Кулиджа», имела экспериментальный характер и была напечатана в 1915 году.

Однако скоро научные интересы П. С. Урысона стали все более склоняться в сторону математики. Решающее влияние в этом отношении имели лекции, прочитанные в Московском университете Д. Ф. Егоровым и Н. Н. Лузиным, учеником которых П. С. Урысон всегда себя и считал. Особенно велико было, конечно, влияние Н. Н. Лузина, который находился тогда в расцвете своей педагогической деятельности в Московском университете и сосредоточил вокруг себя наиболее живых и способных к математике студентов. В конце университетского курса Н. Н. Лузин предложил Павлу Самуиловичу «остаться при университете» (то есть поступить в аспирантуру) под его руководством. Это предложение, принятое П. С. Урысоном, определило окончательно выбор им математической специальности.

Аспирантский период в жизни П. С. Урысона, продолжавшийся с 1919 по 1921 год, целиком попал в незабываемые первые годы формирования послереволюционной, советской математической школы. То были годы необычайного подъема и увлечения внезапно раскрывшимися новыми творческими возможностями, годы подлинного цветения для многих молодых людей, впервые вкусивших радость творческого соприкосновения с наукой в тех новых, небывалых условиях, которые открыла Революция. Мало найдется в истории математической науки периодов столь горячего энтузиазма, как начало двадцатых годов в Московском университете, когда в столь короткий срок, буквально за несколько лет, возникла целая большая научная школа, в значительной степени определившая дальнейшее развитие математики в нашей стране и сразу выдвинувшая целый ряд новых выдающихся ученых.

П. С. Урысон сразу же попал в самый центр этого сообщества молодых математиков — в первую очередь, конечно, вследствие необычайно яркого своего математического таланта, но также и вследствие своей увлеченности наукой, своей жизнерадостности, своего кипучего темперамента и обаятельных свойств своего характера, открытого, дружелюбного, совершенно чуждого какой бы то ни было мелочности. Его любили в товарищеской среде, как любят людей в которых чувствуется подлинное движение большой человеческой личности, одаренной не только в смысле способностей к одной какой-нибудь специальности, но и по всему диапазону эмоциональных, этических и социальных свойств человека.

Математическое творчество П. С. Урысона развивалось бурно и разнообразно. Уже в студенческие годы он овладел математикой своего времени, а его аспирантские отчеты надолго запомнились в среде московских математиков: почти каждый отчет, даже по специальностям, далеким от основных математических интересов Павла Самуиловича, содержал тот или иной новый результат или, в крайнем случае, какое-нибудь существенное упрощение или усовершенствование доказательств. А сколько различных ошибок и неточностей находил по этому поводу Павел Самуилович в математической литературе!

Но и это не все. Из аспирантских отчетов П. С. Урысона возникли некоторые его исследования по математическому анализу (в частности, работа по нелинейным интегральным уравнениям), ставшие впоследствии знаменитыми и в полном смысле этого слова «классическими». Тем не менее, в наибольшей степени обессмертили его имя топологические исследования и в первую очередь созданная им теория размерности, явившаяся одним из значительнейших достижений математической мысли первых десятилетий текущего века.

Теорию размерности П. С. Урысон построил в течение 1921/22 учебного года. К этому времени он уже закончил аспирантуру и в июне 1921 года был утвержден в должности доцента Московского университета. Тем же летом Д. Ф. Егоров поставил перед П. С. Урысоном задачу: *дать внутреннее топологическое определение линии, которое для плоских фигур* (то есть для множеств, лежащих в плоскости) *было бы эквивалентно известному определению канторовой кривой* *как замкнутого, связного множества точек плоскости, не содержащего внутренних точек* (относительно плоскости)*). В той же беседе Д. Ф. Егоров поставил и задачу определения возможно широкого класса множеств, которые естественно было бы называть *поверхностями*.

Обе задачи оказались поставленными удачно (хотя с формальной точки зрения и не вполне определенным образом). Павел Самуилович сразу же стал упорно думать над этими задачами. Очень скоро предметом его размышлений стало общее определение *размерности*, то есть числа измерений геометрической фигуры. Все лето 1921 года прошло в напряженных попытках найти «настоящее» определение, причем Павел Самуилович переходил от одного варианта к другому, постоянно строя примеры, показывающие, почему тот или иной вариант надо отбросить. Это были два месяца действительно всепоглощающих размышлений. Наконец, в одно утро в конце августа Павел Самуилович проснулся с готовым, окончательным и всем теперь хорошо известным «индуктивным определением размерности» (см. ниже).

Это было в деревне Бурково вблизи Болшева, на берегу реки Клязьмы, там группа молодых московских математиков (в том числе В. В. Степанов, Д. Е. Меньшов, Н. К. Бари) жила на даче. В то же утро, во время купанья в Клязьме П. С. Урысон рассказал мне свое определение размерности и тут же, во время этого разговора, затянувшегося на несколько часов, набросал план всего построения теории размерности, с целым рядом теорем, бывших тогда гипотезами, за которые неизвестно было, как и взяться, и которые затем доказывались одна за другой в течение последующих месяцев. Никогда потом я не был участником или свидетелем математического разговора, который состоял из такого сплошного потока новых мыслей, как в то августовское утро.

Вся набросанная тогда программа полностью осуществилась в течение зимы 1921/22 года, к весне 1922 года вся теория размерности была готова. Оказалось, что можно естественным образом поставить в соответствие каждому множеству E (каждому метрическому пространству) некоторое неотрицательное целое число $\dim E$ — размерность этого множества. Новое определение оказалось плодотворным, оно явилось источником установления целого ряда новых свойств точечных множеств, что в свою очередь привело к постановке новых математических задач.

Попытаемся изложить предложенное П. С. Урысоном «индуктивное» определение размерности, отступив от первоначальной формы, данной этому определению его автором.

Под *множеством* будем понимать любое замкнутое множество, лежащее в каком-либо метрическом пространстве (или хотя бы только в каком-либо евклидовом пространстве произвольного числа измерений). Скажем, что два множества P и Q, лежащие в любом метрическом (или даже топологическом) пространстве R, *отделены друг от друга*, если эти множества не имеют общих точек и если, кроме того, ни одно из них не содержит предельной точки другого. Так например, интервалы (0,1) и (1, 2) числовой прямой отделены друг от друга (хотя имеют общую предельную точку 1). Точно так же отделены друг от друга внутренность круга и вся внешняя к данному кругу область (состоящая из всех точек плоскости, расстояние каждой из которых от центра круга превосходит его радиус).

Скажем далее, что какое-либо множество B является *перегородкой* меж-

*) То есть не содержащего никакой точки, которая входила бы в данное множество вместе с какой-нибудь своей окрестностью (за окрестность можно взять, например, круг или квадрат).

ду множествами C и D, если дополнение $R \setminus B$ множества B (до всего рассматриваемого нами пространства R) может быть представлено в виде суммы $R \setminus B = P \cup Q$ двух отделенных друг от друга множеств P и Q, из которых одно (пусть это будет P) содержит множество C, а другое содержит множество D:

$$P \supset C, \quad Q \supset D, \quad B \cup P \cup Q = R.$$

После этого определение *размерности* метрических пространств (или хотя бы множеств, лежащих в евклидовых пространствах любого числа измерений) осуществляется по индукции следующим образом.

Пустому множеству приписывается размерность -1.

Предположим, что мы уже определили множества размерности, не превосходящей $n-1$. *Скажем, что множество* X (метрическое пространство) *имеет размерность не более* n, *если между любыми двумя лежащими в* X *замкнутыми множествами без общих точек имеется перегородка размерности не более чем* $n-1$. *После этого мы естественно говорим, что размерность множества* X *равна* n, *если* X *входит в класс множеств, имеющих размерность не более* n, *и не входит в класс множеств, имеющих размерность не более* $n-1$.

Если интересоваться лишь так называемыми «сепарабельными» метрическими пространствами (то есть имеющими счетное всюду плотное подмножество точек)— а только ими и интересовались в начале построения теории размерности,— то определение размерности, эквивалентное данному выше, можно сформулировать и так.

Размерность пустого множества полагаем равной -1.

Предполагая, что множества размерности не более $n-1$ *уже определены, говорим, что размерность множества* X *не превосходит* n, *если, какова бы ни была точка* $x \in X$ *и не содержащее ее замкнутое множество* Φ *между* x *и* Φ *существует перегородка размерности не более* $n-1$.

Последнее утверждение в свою очередь эквивалентно такому.

Какова бы ни была точка $x \in X$ *и ее окрестность* $O(x)$, *существует меньшая окрестность* $O_1(x)$ *той же точки, такая, что граница окрестности* $O_1(x)$ *имеет размерность не более* $n-1$.

Теперь читатель уже легко докажет что всякое конечное множество (на прямой, на плоскости) и вообще всякое метрическое пространство, состоящее из конечного числа точек, имеет размерность 0; что прямая и окружность, а также все известные читателю «элементарные кривые» (парабола, эллипс, синусоида и другие) имеют размерность 1. По индуктивному определению отсюда следует, что плоскость и сфера имеют размерность не более чем 2. После этого, снова пользуясь индукцией, доказываем, что трехмерное пространство имеет размерность не более чем 3. Но что плоскость имеет размерность ровно 2, читателю едва ли удастся доказать — для этого надо знать больше, чем можно знать, никогда не изучая топологии.

Что же касается прямого (то есть основывающегося непосредственно на данных выше определениях) доказательства того, что размерность трехмерного пространства не меньше чем 3 (и следовательно, равна трем), то для такого доказательства Урысону понадобилось свыше двадцати страниц!

Идти дальше таким же непосредственным путем было невозможно; понадобились какие-то «обходные маневры».

Их Урысон нашел в замечательной работе знаменитого французского математика Лебега, впервые заметившего в 1911 году (хотя и не доказавшего строго) следующий глубокий геометрический факт (впервые строго доказанный Брауэром*) в 1913 году).

Пусть n-мерный куб Q^n покрыт конечным числом замкнутых множеств $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$. Если эти множества достаточно малы по диаметру (а именно, если их диаметры меньше ребра куба), *то имеется хотя бы одна точка, принадлежащая не менее чем $n+1$ множеству из числа данных множеств $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$.*

С другой стороны, уже рисунок 1 показывает, как построить покрытие квадрата сколь угодно мелкими замкнутыми множествами (даже квадратами), имеющее «кратность» 3**). Читатель легко обобщит это построение на кубы трех и более измерений. Таким образом, мы приходим к следующему новому определению размерности, которое сформулируем для ограниченных замкнутых множеств, лежащих в евклидовых пространствах любого числа измерений (хотя это определение легко допускает обобщение на любые метрические и даже на еще более общие пространства).

Скажем, что размерность dim *X пространства X не превосходит n, если это пространство допускает сколь угодно мелкое покрытие замкнутыми множествами, имеющее кратность не более чем $n+1$.*

Урысон доказал замечательную «теорему эквивалентности», утверждающую, что *для всех ограниченных замкнутых множеств X, лежащих в каких-либо евклидовых пространствах, только что определенная размерность* dim *X совпадает с ранее определенной индуктивной размерностью.* В действительности этот факт имеет

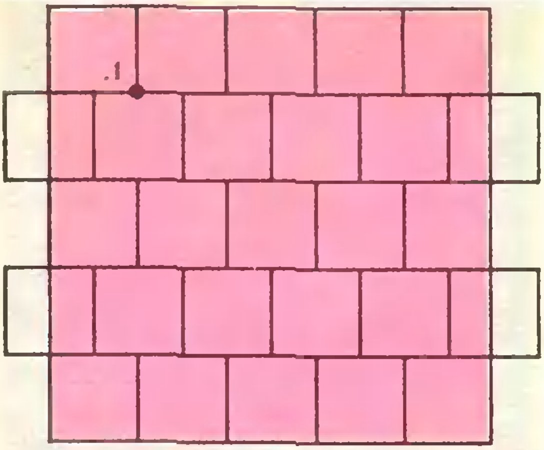


Рис. 1.

место для всех метрических (и еще более общих) пространств. Глубина доказанной Урысоном теоремы эквивалентности состоит в том, что она устанавливает эквивалентность двух совсем не схожих между собою геометрических свойств, двух совершенно различных по их формулировкам определений, являющихся, как оказалось, определениями одного и того же понятия, а именно *понятия размерности геометрической фигуры,* что это понятие может быть таким образом охарактеризовано с совершенно различных сторон. Именно такие сопоставления, казалось бы, совершенно различных подходов к каким-нибудь явлениям и оказываются в науке наиболее плодотворными.

Как следствие своей «теоремы эквивалентности» Урысон доказал, что *n-мерное в элементарном геометрическом смысле евклидово пространство имеет размерность n и в смысле приведенного выше общего индуктивного определения размерности.* Но этим далеко не ограничилось значение этой теоремы, *она послужила поворотной* точкой в развитии теории размерности и значительной части всей топологии вообще. В частности, эта теорема явилась отправной точкой для построения гомологической теории

*) Л. Э. Я. Брауэр (1881—1966) — выдающийся голландский математик, один из создателей топологии и целого направления («интуиционизм») в обосновании математики.

**) Мы говорим, что данная система множеств *имеет кратность k*, если *k* есть наибольшее число множеств с непустым пересечением среди множеств данной системы (на рисунке 1 точка *A* принадлежит трем множествам).

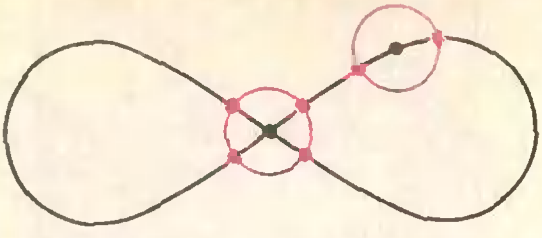


Рис. 2.

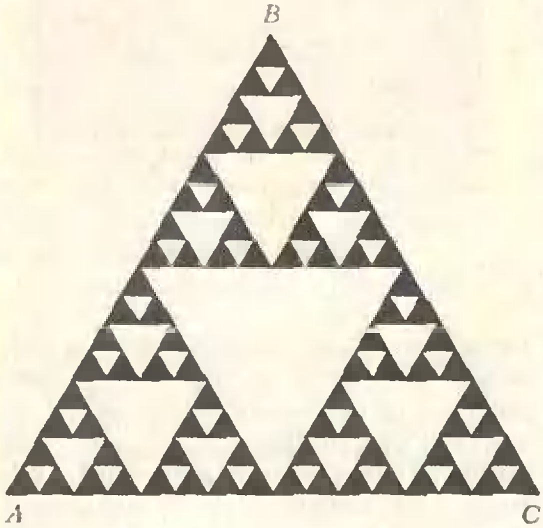


Рис. 3.

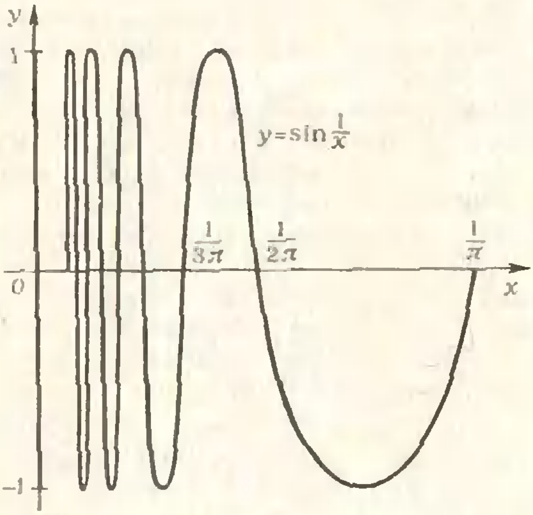


Рис. 4.

компактных метрических и более общих пространств. Помимо теоремы эквивалентности отмечу еще несколько теорем теории размерности: *всякое множество, являющееся суммой счетного числа замкнутых множеств размерности n, само имеет размерность n; для любых двух множеств A и B выполняется неравенство Урысона:*

$$\dim(A\cup B)\leqslant\dim A+\dim B+1.$$

Из последнего неравенства и из теоремы о сумме замкнутых множеств П. С. Урысон вывел следующий факт: *размерность любого множества есть наименьшее такое число n, что данное множество может быть представлено в виде суммы n+1 нульмерных множеств* (при этом нульмерные множества могут быть определены, например, как множества, гомеоморфные подмножествам множества иррациональных чисел числовой прямой или канторова совершенного множества).

Большое значение Павел Самуилович придавал предложению, что *ограниченное множество, являющееся совместной границей двух связных областей в n-мерном евклидовом пространстве R^n, есть так называемое (n+1)-мерное канторово многообразие* (под k-мерным канторовым многообразием П. С. Урысон понимал k-мерный континуум, который остается связным после удаления из него любого множества размерности не более k—2). Для случая $n=3$ это предложение доказал П. С. Урысон, а впоследствии оно было доказано во всей общности. Все обычные многообразия являются и канторовыми многообразиями (в частности, канторовыми многообразиями соответствующего числа измерений являются все кубы). Именно понятие канторова многообразия П. С. Урысон считал центральным в созданной им теории: одномерные канторовы многообразия суть просто одномерные континуумы, это и есть линии в наиболее общем смысле слова; плоские линии в этом смысле совпадают с канторовыми кривыми. Таким образом решается первая исходная задача, поставленная Д. Ф. Егоровым. Двумерные канторовы многообразия П. С. Урысон считал поверхностями в самом широком смысле слова, и с этой точки зрения теорема о том, что *совместная граница двух* *областей в трехмерном пространстве есть двумерное канторово многообразие* («канторова поверхность», как любил говорить Павел Самуилович), имела, конечно, решающее значение. Любопытно отметить, что свою работу по теории размерности Павел Самуилович назвал «Мемуаром о канторовых многообразиях».

Вторая часть этого мемуара, изданная уже посмертно в точном соответствии с планом и предварительными набросками автора, всецело посвящена теории одномерных континуумов, в частности, их «индексам ветвления» (в различных точках). При этом *индекс ветвления* кривой в данной ее точке x есть наименьшее такое натуральное число k, что точка x имеет столь угодно малую окрестность, граница которой состоит из k точек. Прямолинейный отрезок (и всякая гомеоморфная ему кривая) имеет в двух концевых точках индекс ветвления 1, во всех остальных точках — индекс 2; лемниската (восьмерка) имеет во всех точках индекс ветвления 2, кроме одной точки с индексом 4 (см. рис. 2). Выбрасывая из замкнутого треугольника ABC внутренности всех белых треугольников, построенных на рисунке 3, и продолжая намеченный процесс до бесконечности, получим кривую S, впервые построенную польским математиком В. Серпинским, имеющую в трех точках A, B, C индекс 2, во всех вершинах всех остальных треугольников (их счетное множество)— индекс 4 и в множестве (мощности континуума) всех остальных точек — индекс 3 (докажите это!). Если взять график функции $x = \sin\frac{1}{x}$ на полуинтервале $0 < x \leq \frac{1}{\pi}$ и пополнить его всеми точками $-1 \leq y \leq 1$ предельного сегмента оси ординат, то получится кривая (см. рис. 4, масштаб на осях разный!), которая во всех точках $(0, y)$, $-1 \leq y \leq 1$, предельного сегмента имеет бесконечный («счетный») индекс ветвления, в точке $\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ — индекс 1, а во всех остальных точках — индекс 2. Существуют кривые, имеющие во всех точках бесконечный (и даже несчетный, равный мощности континуума) индекс ветвления. Такова кривая «ковер Серпинского», получаемая продолженным бесконечно процессом выкидывания из изображенного на рисунке 5 замкнутого квадрата изображенных на нем открытых квадратов. Урысон доказал следующую любопытную теорему: *если кривая имеет во всех своих точках индекс не менее k, то непременно на ней имеются и точки индекса не менее $2k-2$, при этом для каждого конечного k имеется кривая, имеющая лишь точки индексов k и $2k-2$*. Из доказанной Урысоном теоремы следует, что *если кривая во всех своих точках имеет один и тот же конечный индекс ветвления, то он равен 2, и все кривые, удовлетворяющие этому условию, гомеоморфны окружности.*

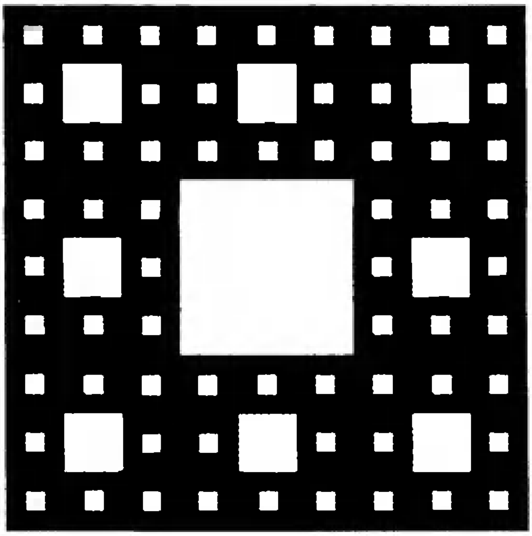


Рис. 5.

Перечисленные выше теоремы П. С. Урысона составляют лишь небольшую часть множества установленных им конкретных геометрических факторов, составивших содержание его мемуара по теории размерности. Как я уже сказал, все эти теоремы были доказаны в течение зимы 1921/22 года. Параллельно Павел Самуилович читал в Московском университете курс под заглавием «Топология континуумов», в котором излагались все эти результаты, часто тотчас же после их доказательства. Этот курс — первый топологический курс, прочитанный не только в Московском университете, но и вообще в нашей стране,— был, несомненно, одним из самых замечательных математических курсов, когда-либо прочитанных в стенах Московского университета, именно в силу его сплошь творческого характера.

Лето 1922 года, проведенное П. С. Урысоном вместе со мной снова в окрестностях Болшева (в так называемых Старых Горках), было периодом наших совместных исследований по теории топологических пространств.

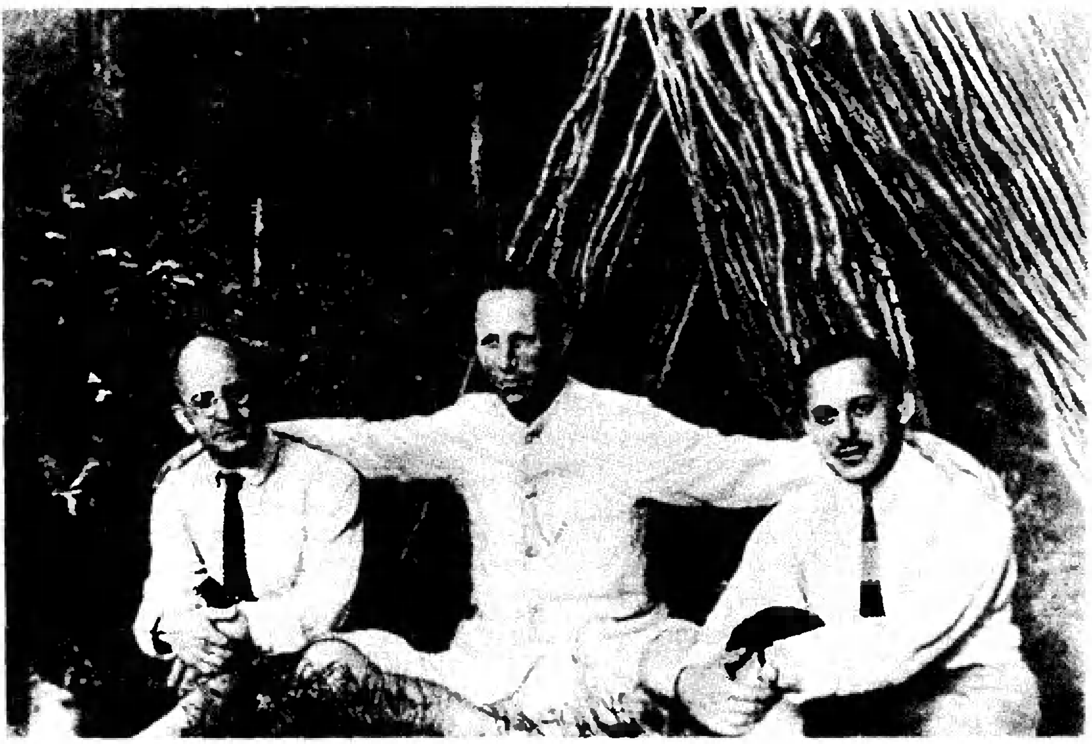
В течение этого лета были получены результаты, вошедшие в наш общий «Мемуар о компактных пространствах», третье издание которого недавно (в 1972 году) было опубликовано в виде отдельной монографии.

В это же лето и часть следующей зимы Павел Самуилович сделал свою работу по теории меры. Зимой 1922/23 года Павел Самуилович продолжал заниматься главным образом теорией топологических пространств. В это время была доказана наша совместная теорема о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы топологическое пространство было гомеоморфно метрическому (так называемая «общая метризационная теорема»), была доказана П. С. Урысоном и замечательная теорема о том, что *все метрические пространства со счетным всюду плотным множеством и только они гомеоморфны множеством, лежащим в гильбертовом пространстве*. Доказательство возможности топологически включить в гильбертово пространство всякое нормальное пространство со счетной базой*) то есть доказательство того, что *нормальность представляет собой необходимое и достаточное условие для метризуемости пространств со счетной базой*, было получено Павлом Самуиловичем лишь несколько позже в 1924 году. За зиму 1922/23 года П. С. Урысоном был окончательно отредактирован мемуар по теории размерности, а мною — наш общий мемуар по теории компактных пространств. В эту же зиму Павел Самуилович с большим увлечением изучал теорию относительности, с тем, чтобы на следующий год (то есть зимой 1923/24 года) читать по этому предмету курс лекций в университете. Лето 1923 года ушло на поездку в Германию, где Павел Самуилович с большим успехом делал доклады в Геттингенском математическом обществе и сразу же привлек к своим топологическим работам внимание Гильберта**). В качестве отдыха было предпринято пешеходное путешествие по Норвегии. Вернувшись в Москву осенью 1923 года, Павел Самуилович стал со свойственным ему увлечением заниматься новыми отделами топологии: он изучал мемуары Пуанкаре и Брауэра.

В эту последнюю зиму своей жизни П. С. Урысон все больше и больше интересовался так называемой «комбинаторной топологией», не бросая, однако, своих занятий и различными вопросами теоретико-множественной топологии. В последние месяцы жизни он написал свой известный мемуар «О мощности связных

*) Топологическое пространство называется *нормальным*, если любые два его непересекающиеся замкнутые множества имеют непересекающиеся окрестности (то есть содержащие их непересекающиеся открытые множества).

**) Д. Гильберт (1862—1943) — один из величайших математиков девятнадцатого и двадцатого веков. Ему принадлежат фундаментальные работы почти во всех областях математики.



П. С. Александров, Л. Э. Я. Брауэр и П. С. Урысон летом 1924 года. (Фотография публикуется впервые)

множеств», где среди других результатов был построен знаменитый пример счетного связного хаусдорфова пространства, одновременно он построил универсальное метрическое пространство со счетной базой, содержащее изометрический образ всякого метрического пространства со счетной базой. П. С. Урысон доказал, что *построенное им пространство является (с точностью до изометрии) единственным полным универсальным метрическим пространством со счетной базой, обладающим свойством метрической однородности в том смысле, что любые два его изометричных конечных множества могут быть переведены друг в друга изометрическим отображением всего пространства на себя.* Кроме того, построенное П. С. Урысоном метрическое пространство обладает рядом еще и других интересных свойств, в том числе связностью и локальной связностью (всякие две его точки могут быть соединены прямолинейным отрезком).

Лето 1924 года П. С. Урысон снова провел в заграничной командировке. В этом нашем совместном путешествии были посещены Германия, Голландия и Франция. В частности, работы Павла Самуиловича произвели очень большое впечатление на Брауэра и Хаусдорфа, которые видели в этих работах самое большое топологическое достижение того времени. Для отдыха была предпринята поездка в маленькое рыбацкое поселение Ба (Batz) в южной части Бретании. Туда мы приехали во второй половине июля, и там Павел Самуилович написал свою работу о связных множествах. Это пребывание было прервано лишь недельной поездкой на крайний запад Бретании—Финистерр, суровые и дикие места, произведшие на Павла Самуиловича огромное впечатление. Из этой поездки мы вернулись 11 августа, а 14 августа Павел Самуилович закончил свой мемуар и собирался последовательно писать сначала работу о метризации нормальных пространств со счетной базой, а потом работу об универсальном метрическом пространстве. Лишь первая страница первой из этих двух работ была им написана — в день его смерти. В эти дни в океане нарастало волнение, привлекавшее Павла Самуиловича и заставлявшее его плавать с особенным увлечением. К 17 августа это волнение перешло в настоящий шторм, и купанье, предпринятое в этот день в начале шестого часа пополудни, оказалось для него роковым: схваченный набежавшей огромной волной, Павел Самуилович был брошен ею о скалу. Его удалось вытащить из воды лишь спустя сорок минут, и попытки вернуть его к жизни остались безуспешными.

П. С. Урысон похоронен там же, на кладбище в Ба.

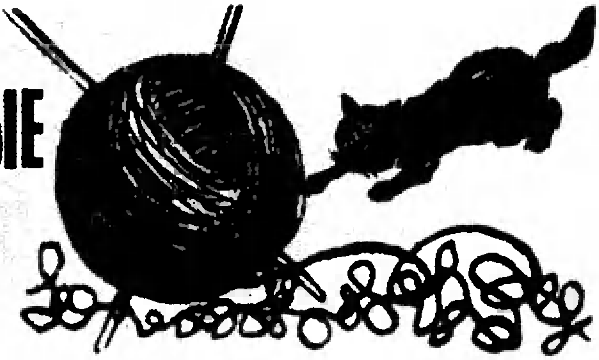
Вся научная деятельность П. С. Урысона продолжалась каких-нибудь четыре года, и за эти немногие годы он оставил неизгладимый след в науке. Теория размерности, метризационные теоремы, знаменитая «лемма Урысона» о существовании достаточно многих непрерывных функций в нормальных пространствах, теорема о включении в гильбертово пространство — эти и другие результаты П. С. Урысона представляют собой огромный вклад в науку, не только не забытый за истекшую со дня его смерти половину века, но доказавший свою жизнеспособность в многочисленных дальнейших исследованиях.

Оставшиеся незавершенными научные работы П. С. Урысона, иногда имевшиеся лишь в набросках и даже только в устных высказываниях, были мною подготовлены к печати и опубликованы полностью при деятельном участии Брауэра, который, в частности, прочитал корректуры всех работ П. С. Урысона. Их первые публикации были отчасти на немецком, отчасти на французском языке, полный русский перевод составил два тома, вышедших под названием «Труды по топологии и другим областям математики» в 1951 году. Сейчас основные топологические теоремы, доказанные П. С. Урысоном, входят во все учебники топологии.

Трудно, да и бесполезно гадать о том, в каких направлениях развивалось бы математическое творчество П. С. Урысона, если бы его жизнь не оборвалась так преждевременно и так трагически. Но несомненно, что в его лице математическая наука потеряла ученого самого большого масштаба, с универсальной математической одаренностью, с интересами, охватывающими всю математику, с любознательностью, распространявшейся на самые разнообразные области человеческого познания. Общая одаренность его личности, объективно запечатлевшаяся в его научном наследии, воспринималась соприкасавшимися с ним людьми в самых различных ее проявлениях: в его лекциях, удивительных по проникновенности и образности мысли, в его умении и любви работать, в его сильных и глубоких реакциях на все значительное, что происходило вокруг него в жизни человеческого общества, в той остроте, с которой он воспринимал природу и искусство (главным образом музыку), и во многом другом, что делает образ Павла Самуиловича не только живым и незабываемым, но и неповторимым по своей творческой силе и по своему человеческому обаянию для всех людей, которым пришлось с ним встретиться на жизненном пути.

М. С. ТОРОНДЖАДЗЕ
А. Д. БЕНДУКИДЗЕ

КРИВЫЕ ПЕАНО



С 26 по 30 марта 1974 года в Тбилиси состоялась вторая научная конференция учащихся Тбилисской физико-математической средней школы-интерната имени В. М. Комарова. На этой конференции грузинская школьница Медея Торонджадзе прочитала доклад «Кривые Пеано», подготовленный под руководством А. Д. Бендукидзе. Доклад был оформлен в виде статьи, которую мы предлагаем вниманию читателей. В ней рассказано о том, как рождалось определение линии, и о кривой, из-за которой это определение пришлось менять. Окончательное определение линии (точнее, размерности точечного множества) вы найдете в статье академика П. С. Александрова (см. с. 3).

Что такое линия?

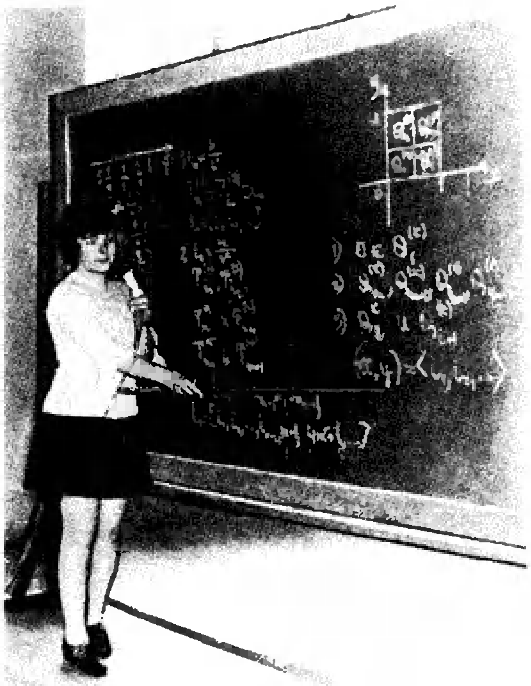
Наверное, многие из тех, кому будет задан этот вопрос, с недоумением пожмут плечами и ответят: «Линия? Да это же очень просто! Проведите острием хорошо отточенного карандаша по бумаге, и вы получите линию».

Кажется, что они правы,— ведь говоря о линии, мы и в самом деле представляем себе нечто, похожее на вьющийся тонкий штрих, нарисованный на листе бумаги.

И тем не менее они не будут правы! Причина очень проста: они дали не определение, а указание на то, что следует понимать под линией. Впрочем, винить их вряд ли стоит, так как дать точное математическое определение линии не столь просто, как это может показаться с первого взгляда. Математикам для этого понадобилось около 2200 лет!

Первым, кто попытался определить линию, был Евклид (III век до н. э.). Но его определение *«линия — это длина без ширины»* ни в коем случае нельзя считать удовлетворительным.

Спустя много лет после Евклида французский математик Рене Декарт (1596—1650) сделал существенный шаг по пути уточнения понятия линии. Согласно Декарту, *линия есть множество точек плоскости, коорди-*



Медея Торонджадзе читает доклад «Кривые Пеано» на конференции учащихся физико-математических школ-интернатов в Тбилиси *наты которых удовлетворяют некоторому уравнению вида* $F(x, y)=0$.

Это было довольно общее и хорошее определение линии. Оно было хорошо тем, что позволяло свести изучение линии к изучению задающего ее уравнения $F(x, y)=0$. Но позже выяснилось, что нередко функция $F(x, y)$ имеет довольно сложный вид.

Например, если окружность радиуса R задается уравнением

$$x^2+y^2-R^2=0$$

(здесь $F(x, y)=x^2+y^2-R^2$), то спираль Архимеда таким простым уравнением задать нельзя. Спираль Архимеда — это кривая, описываемая точкой, равномерно движущейся по лучу, который при этом равномерно вращается вокруг неподвижной точки (рис. 1). Эту кривую проще изучать геометрически, не прибегая к уравнениям.

Определение Декарта имело еще один недостаток: если не накладывать никаких ограничений на вид функции $F(x, y)$, то любое множество на плоскости по Декарту является линией (достаточно определить функцию $F(x, y)$ так: на заданном множестве пар (x, y) эта функция равна нулю, во всех остальных точках плоскости $F(x, y)=1$). Например, единичный квадрат по Декарту является «линией», он задается уравнением

$$|x|+|x-1|+|y|+|y-1|-2=0,$$

здесь функция

$$F(x, y)=|x|+|x-1|+|y|+|y-1|-2$$

даже непрерывна!

Во второй половине XIX века другой французский математик Камилл Жордан (1838—1922) развил понятие линии, предложенное Декартом. Жордан определил плоскую линию как *множество точек плоскости, координаты x и y которых даны уравнениями*

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции, непрерывные на отрезке $[0, 1]$.

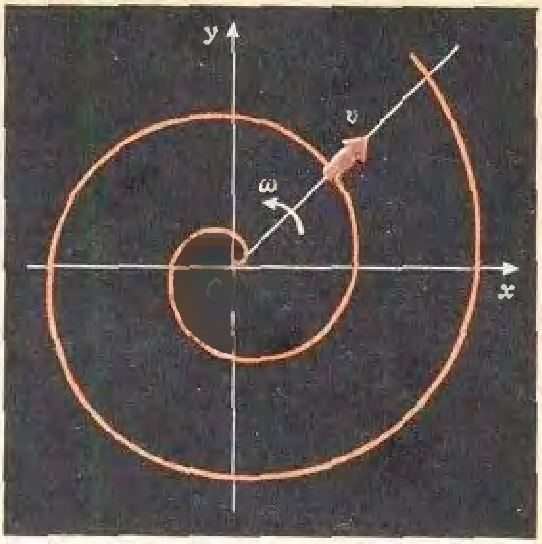


Рис. 1.

Сейчас такой способ задания линии называется параметрическим (с параметром t).

Например, параметрические уравнения окружности радиуса R имеют вид

$$x=R\cos 2\pi t, \quad y=R\sin 2\pi t.$$

Спираль Архимеда (точнее, ее кусок) задается несложными уравнениями

$$x=vt\cos\omega t, \quad y=vt\sin\omega t.$$

Некоторое время казалось, что, наконец, найдено удачное определение линии, при котором квадрат уж никак в «линии» не попадет. Как бы не так!

В 1890 году итальянский математик Джузеппе Пеано (1858—1932) построил пример кривой, обегающей все точки квадрата, и притом удовлетворяющей определению линии, данному Жорданом! В дальнейшем были найдены и другие примеры подобных «линий». Теперь такие «линии» называются «кривыми Пеано». Построение одной из кривых Пеано мы приведем в конце статьи.

Кривые Пеано показывают, что определение Жордана слишком широко. Трудно считать линией кривую, заполняющую целый квадрат. В то же время оно и слишком узко — существуют линии, не подходящие под это определение.

Итак, что же такое линия? В случае плоских линий окончательный ответ на этот вопрос был дан одним из крупнейших математиков конца XIX — начала XX века Георгом Кантором (1845—1918). Не останавливаясь на точной формулировке этого определения, приведем один интересный пример канторовой линии, построенный известным польским математиком Вацлавом Серпинским.

Возьмем квадрат. Разделим его на девять конгруэнтных квадратов и удалим из него внутренние точки центрального квадрата. Каждый из оставшихся восьми квадратов разделим на девять конгруэнтных квадратов и в каждом из них снова удалим внутренние точки центрального квадрата. Продолжая этот процесс неограниченно, мы и получим искомую линию. Ее называют *ковром Серпинского* (на первой странице обложки показана фигура, которая получается при построении ковра Серпинского после третьего шага). Обратите внимание на то, что сколь угодно близко от любой из оставшихся точек (ковра Серпинского) найдется точка, выкинутая из исходного квадрата.

В 20-х годах нашего века советский математик П. С. Урысон обобщил определение Кантора и дал общее определение линии *).

Построение кривой Пеано

1. Пусть σ — единичный отрезок $[0,1]$. Разделим его на четыре конгруэнтных отрезка:

$$\sigma_1^{(1)}=\left[0,\quad \frac{1}{4}\right],\qquad \sigma_2^{(1)}=\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right],$$

$$\sigma_3^{(1)}=\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right],\qquad \sigma_4^{(1)}=\left[\frac{3}{4},\quad 1\right].$$

*) Об этом подробно рассказано в статье академика П. С. Александрова «Павел Самуилович Урысон» (см. с. 3). См. также А. С. Пархоменко «Что такое линия», М., Гостехиздат, 1954.

Назовем эти отрезки *отрезками первого ранга*. Разделив каждый из них на четыре конгруэнтных отрезка, получим 16 *отрезков второго ранга* $\sigma_i^{(2)}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ 16)$. Продолжая процесс деления, получим отрезки третьего, четвертого и больших рангов. При этом отрезки r-го ранга будут иметь вид:

$$\sigma_i^{(r)}=\left[\frac{i-1}{4^r},\quad \frac{i}{4^r}\right]$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ 4^r).$$

Возьмем теперь некоторую точку $t_0\in\sigma$.

Если она не совпадает ни с одной точкой деления, то существует ровно один отрезок каждого ранга, ее содержащий. Пусть такими являются $\sigma_{i_1}^{(1)}$, $\sigma_{i_2}^{(2)}$, $\sigma_{i_3}^{(3)}$, … . Поставим в соответствие точке t_0 бесконечную последовательность натуральных чисел i_1, i_2, i_3, … и будем это записывать так:

$$t_0=(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots).$$

Пример. $1/3=(2,\ 6,\ 22,\ 86,\ \ldots)$.

Если же точка t_0 совпадает с какой-либо точкой деления, то есть имеет вид $m/4^n$, то начиная с отрезков n-го ранга ее будут содержать два соседних отрезка каждого ранга. Сопоставим ей две последовательности:

$$t_0=(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{n-1},\ m,\ 4m,\ 16m,\ \ldots).$$

$$t_0=$$
$$=(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{n-1},\ m+1,\ 4m+1,\ 16m+1,\ \ldots).$$

Пример. $1/16=(1,\ 1,\ 4,\ 16,\ \ldots)=$ $=(1,\ 2,\ 5,\ 17,\ \ldots)$.

Итак, каждой точке отрезка σ мы поставили в соответствие одну или две последовательности натуральных чисел $(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots)$, в которых $1\leqslant i_1\leqslant 4$, $4i_k-3\leqslant i_{k+1}\leqslant 4i_k$. Обратно, каждая такая последовательность определяет единственную точку отрезка σ (докажите!).

2. Проведем аналогичное построение для единичного квадрата Q. Разделив его на четыре конгруэнтных квадрата, получим квадраты первого ранга: $Q_1^{(1)}$, $Q_2^{(1)}$, $Q_3^{(1)}$, $Q_4^{(1)}$. Деление каждого из этих квадратов на четыре конгруэнтных квадрата дает квадраты второго ранга и так далее. Вообще, деление каждого квадрата r-го ранга $Q_i^{(r)}$ на четыре конгруэнтных квадрата дает четыре квадрата $(r+1)$-го ранга: $Q_{4i-3}^{(r+1)}$, $Q_{4i-2}^{(r+1)}$, $Q_{4i-1}^{(r+1)}$, $Q_{4i}^{(r+1)}$ $(i=1,$ $2,\ \ldots,\ 4^r)$. Нумерацию квадратов проведем так, чтобы:

1) первый квадрат любого ранга содержал точку $(0,\ 0)$;

2) можно было из квадрата $Q_{i-1}^{(r)}$ войти в квадрат $Q_i^{(r)}$, обойти в нем последовательно квадраты $Q_{4i-3}^{(r+1)}$, $Q_{4i-2}^{(r+1)}$, $Q_{4i-1}^{(r+1)}$, $Q_{4i}^{(r+1)}$ и выйти в квадрат $Q_{i+1}^{(r)}$, пересекая лишь стороны (но не вершины!) квадратов ранга $(r+1)$.

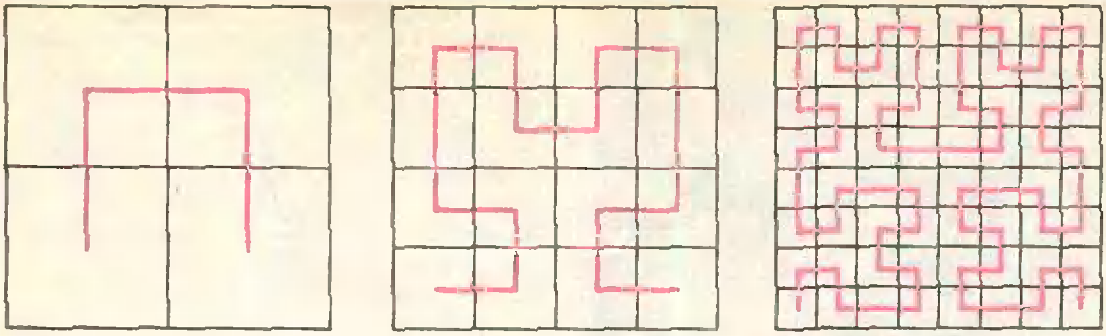


Рис. 2.

Предлагаем читателю доказать, что такая нумерация всегда возможна. На рисунке 2 приведены квадраты первых трех рангов, причем красной ломаной указан путь, по которому идет нумерация квадратов (начиная с левого нижнего квадрата).

Продолжая рассуждения, убеждаемся, что каждой точке (x_0, y_0) квадрата Q можно привести в соответствие одну или несколько (сколько?) последовательностей натуральных чисел, запишем это так:

$$(x_0, y_0) = [i_1, i_2, i_3, \dots],$$
$$(1 \leqslant i_1 \leqslant 4, \ 4i_k - 3 \leqslant i_{k+1} \leqslant 4i_k).$$

Примеры: $(^1/_3, {}^1/_3) = [1, 3, 9, \dots]$; $(^1/_2, {}^1/_3) = [1, 3, 10, \dots] = [1, 14, 56, \dots]$; $(^1/_2, {}^1/_2) = [1, 3, 11, \dots] = [2, 8, 32, \dots] = [3, 9, 33, \dots] = [4, 14, 54, \dots]$.

И здесь можно доказать, что каждая такая последовательность определяет единственную точку (x_0, y_0) из Q.

3. Запись точек отрезка σ и квадрата Q в виде бесконечных последовательностей натуральных чисел дает возможность осуществить отображение σ на Q.

В самом деле, пусть t_0 — произвольная точка σ и

$$t_0 = (i_1, i_2, i_3, \dots).$$

Последняя последовательность однозначно определяет точку (x_0, y_0), которой соответствует последовательность $[i_1, i_2, i_3, \dots]$. Если даже t_0 представимо в виде двух последовательностей, то обе они приводят к одной и той же точке (x_0, y_0). Это легко доказать, если учесть, что длины сторон квадратов с возрастанием ранга стремятся к нулю. Итак, каждому t_0 соответствует единственное (x_0, y_0).

Пусть теперь точка $(x_0, y_0) \in Q$ произвольна и $[i_1, i_2, i_3, \dots]$ — одно из представлений этой точки. Взяв $t_0 = (i_1, i_2, i_3, \dots)$, убеждаемся, что при нашем отображении каждая точка квадрата Q соответствует хотя бы одной точке отрезка σ. А это значит, что σ отображено на Q. Заметим, что это отображение не является взаимно однозначным, некоторые точки Q соответствуют двум, трем или даже четырем точкам σ.

4. Так как каждое t_0 определяет единственную точку (x_0, y_0), то, положив $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, мы тем самым однозначно задаем две функции φ и ψ, определенные на отрезке $[0, 1]$:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

При этом множество точек $(\varphi(t), \psi(t))$ целиком заполняет квадрат Q.

Покажем, что эти функции определяют некоторую кривую Пеано. Для этого достаточно проверить, что функции φ и ψ непрерывны. Но это почти очевидно. В самом деле, пусть n — некоторое натуральное число и t_0 — фиксированная точка отрезка σ. Возьмем t так, чтобы было

$$|t - t_0| < 4^{-n}.$$

Это неравенство означает, что t_0 и t принадлежат одному и тому же или соседним отрезкам ранга n. Но тогда и соответствующие им точки $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $(\varphi(t), \psi(t))$ также будут принадлежать одному и тому же или соседним квадратам ранга n и поэтому

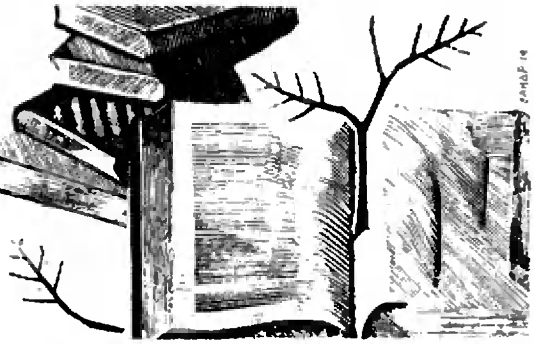
$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < 2^{1-n},$$
$$|\psi(t) - \psi(t_0)| < 2^{1-n}.$$

Отсюда в силу произвольности n следует непрерывность данных функций.

Итак, построенные нами функции задают некоторую кривую Пеано. Отметим, что на этой кривой имеются кратные точки, то есть точки, в которых кривая пересекает саму себя. При этом имеются двукратные, трехкратные и четырехкратные точки. Доказано, что и в общем случае не существует кривой Пеано, не имеющей кратных точек.

Б. ПОНТЕКОРВО

ЮНОСТЬ ЭНРИКО ФЕРМИ



Великий итальянский физик Энрико Ферми (1901—1954) оставил своими трудами глубокий след в теоретической и экспериментальной физике, астрофизике и технической физике. Когда он умер, от нас ушел последний универсальный физик нашего столетия и, вероятно, последний универсальный физик вообще. В помещенной ниже статье, написанной одним из ближайших учеников и сотрудников Ферми — советским академиком Бруно Понтекорво, рассказывается о юношеских годах великого ученого. Текст статьи заимствован из брошюры Б. Понтекорво «Энрико Ферми», выпущенной издательством «Знание» в 1971 году.
В этом же номере журнала, в разделе «Рецензии, библиография», опубликована рецензия И. Зорича на две книги о Ферми.

Ферми родился в Риме 29 сентября 1901 года в семье служащего. Если можно говорить о врожденном призвании, то, несомненно, Ферми был рожден физиком. Хотя в семье никто не побуждал его к занятиям наукой, он с детства проявил исключительный интерес к математике и физике. Интеллектуальное развитие мальчика, впоследствии гениального ученого, представляет большой интерес, и я хотел бы подробнее остановиться на этом.

Неизвестно точно, когда впервые у Ферми появился интерес к науке, но мы располагаем некоторыми фактами благодаря свидетельствам Энрико Персико, профессора физики Римского университета и близкого друга Ферми с того времени, когда им было по 14 лет; его жены, Лауры Ферми, и ряда его сотрудников и друзей, особенно Франко Разетти и Эмилио Сегре, с которыми Ферми делился воспоминаниями. Сегре, например, рассказывает о следующем эпизоде: когда Ферми было только десять лет, он сумел понять, почему окружность описывается уравнением $x^2+y^2=R^2$, хотя это и потребовало от него напряженного интеллектуального усилия.

Позже тринадцатилетнему Ферми очень помог найти правильную дорогу в научном лабиринте инженер Амидей, добрый пожилой человек, друг семьи Ферми, который по праву может гордиться тем, что, обнаружив исключительные способности Ферми, оказал на него большое, а может быть, и решающее влияние. Инженер Амидей был очень аккуратным человеком. Когда после смерти Ферми Сегре попросил Амидея рассказать о первых шагах Энрико в науке, он сумел привести (41 год спустя!) крайне точные и ценные для истории науки сведения, позволяющие понять некоторые важные элементы в формировании титанической личности Ферми. Ниже почти полностью приводится письмо инженера Амидея профессору Сегре, рассказывающее о периоде жизни Ферми от осени 1914 до осени 1918 года.

«...В 1914 году я занимал должность директора инспекторов в министерстве железных дорог. Вместе со мной работал главный инспектор Альберто Ферми. После работы мы обычно возвращались домой вместе. Почти всегда нас сопровождал Энрико Ферми — сын моего коллеги. Мальчик постоянно встречал отца после работы. Узнав, что я серьезно занимаюсь математикой и физикой, Энрико стал задавать мне вопросы. В то время ему было 13 лет, а мне 37.

Хорошо помню его первый вопрос:

— Правда ли, что существует раздел геометрии, в котором важные геометрические свойства выявляются без использования представлений о мере?

Я ответил, что это совершенно справедливо и что раздел этот называется проективной геометрией.

— Но каким образом эти свойства используются на практике инженерами?— спросил он.

Этот вопрос показался мне совершенно резонным. Рассказав мальчику о некоторых свойствах, находящих успешное применение, я пообещал ему принести на следующий день — что и сделал — книгу по проективной геометрии.

Через несколько дней Энрико сказал мне, что он уже проштудировал первые три урока, и обещал возвратить книгу, как только прочтет ее. Примерно через два месяца книга была возвращена. На мой вопрос, встретились ли ему какие-либо трудности, мальчик ответил: «Никаких», и добавил, что он доказал все теоремы и легко решил все задачи (в книге их было более 200).

Я был изумлен: ведь я знал, что среди этих задач были такие, от решения которых я вынужден был отказаться, потому что на это ушло бы слишком много времени. Но я убедился, что Энрико справился с этими задачами. Было совершенно очевидно, что в свободные часы, остававшиеся от приготовления школьных заданий, мальчик в совершенстве изучил проективную геометрию и с легкостью решал сложнейшие задачи. Я убедился в том, что Энрико исключительно одарен, во всяком случае в области геометрии. Когда я сказал об этом его отцу, тот ответил, что в школе Энрико считается хорошим учеником, но не больше.

Впоследствии я узнал, что Энрико изучал математику и физику по разным случайным книгам, которые он покупал в букинистических магазинах на рынке Кампо деи Фьори. Он надеялся, в частности, найти в этих книгах теорию, объясняющую движение волчков и гироскопов. Объяснения он так и не нашел. Но, возвращаясь к этой проблеме снова и снова, мальчик самостоятельно приблизился к разъяснению природы загадочного движения волчка. Все же я сказал ему, что к точному научному объяснению можно подойти, лишь овладев теоретической механикой. Но для ее изучения потребуется знание тригонометрии, алгебры, геометрии и дифференциального исчисления... Энрико согласился со мной, и я стал доставать для него книги, которые могли бы дать ему новые идеи и прочную математическую основу...

Энрико нашел векторный анализ очень интересным, полезным и несложным. С сентября 1917 до июля 1918 года он изучил также некоторые стороны инженерного дела по книгам, которые я доставал для него.

В июле 1918 года, пройдя трехгодичный курс лицея за два года, Энрико получил диплом. Возник вопрос, имеет ли ему смысл поступать в Римский университет. Мы с Энрико вели на эту тему длинные разговоры.

Я спросил у него, чему он хочет посвятить себя: математике или физике? Привожу дословно его ответ:

— Я изучал математику с таким рвением потому, что считал это необходимой подготовкой для последующего изучения физики, которой я намерен посвятить себя целиком и полностью.

Тогда я спросил у него, считает ли он свое знание физики столь же обширным и глубоким, как и математики.

— Я знаю физику шире и глубже, потому что прочел все наиболее известные книги по этому предмету,— ответил он*).

Я уже убедился в том, что Энрико достаточно было прочесть книгу один раз, чтобы знать ее в совершенстве. Помню, например, как однажды он возвратил мне прочитанную им книгу по дифференциальному исчислению. Я предложил ему оставить ее у себя еще на один год, с тем, чтобы он смог пользоваться ею. Ответ Ферми был поразительным.

— Благодарю вас,— сказал он.— В этом нет необходимости, поскольку я уверен, что запомнил все необходимое. Несколько лет спустя идеи предстают передо мной с еще большей отчетливостью, и если мне понадобится формула, я смогу легко вывести ее.

Кроме поразительной способности к наукам, Ферми обладал еще исключительной памятью.

Пришло время, когда я решил, что наступил подходящий момент, чтобы предложить ему свой план... План этот заключался в следующем: Энрико должен поступить не в Римский университет, а в университет в Пизе. До этого ему надо будет выдержать конкурс в Нормальную школу в Пизе и впоследствии совмещать занятия в школе с посещением лекций в университете. Энрико признал разумность моего плана и решил следовать ему, хотя и понимал, что родители будут возражать.

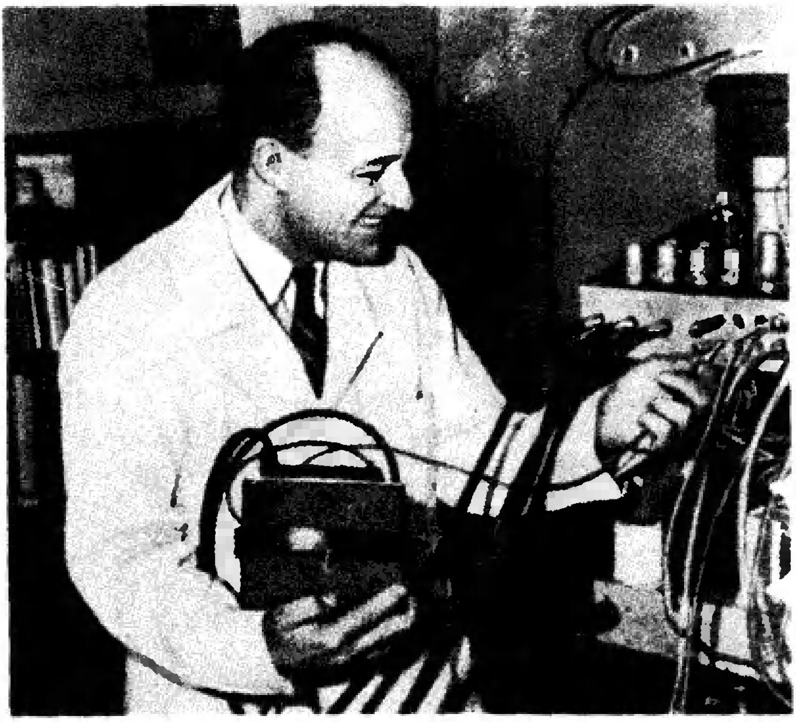
Я немедленно отправился в Пизу, чтобы получить там необходимую информацию и программу для конкурса

Энрико Ферми в 16 лет.

в Нормальную школу. Потом я вернулся в Рим, чтобы проштудировать программу с Энрико. Я не сомневался в том, что он в совершенстве знает предметы, связанные с математикой и физикой. Так оно и оказалось. Энрико не только выдержал конкурс, но оказался первым среди соискателей...»

Осенью 1918 года Ферми, согласно плану инженера Амидея, поступил одновременно в Высшую Нормальную школу Пизы и на физико-математический факультет старинного Пизанского университета. Во всех итальянских университетах нет вступительных экзаменов; нужно лишь иметь аттестат зрелости и, конечно, располагать средствами для оплаты обучения. Для поступления же в Нормальную школу требовалось выдержать довольно трудный конкурс, но для ученика школы обучение в университете было бесплатным. Ученик Нормальной школы автоматически является и студентом университета, но

*) По словам Энрико Персико, одной из этих книг был перевод многотомного курса физики русского ученого О. Д. Хвольсона. Мне помнится, что сам Ферми как-то сказал, что основные сведения в области общей и экспериментальной физики он почерпнул именно из этого курса.



Энрико Ферми во время эксперимента.

дополнительно посещает лекции и семинары в школе.

Высшая Нормальная школа в Пизе была создана в 1813 году Наполеоном по типу Высшей Нормальной школы в Париже; она была единственным бесплатным высшим учебным заведением Италии. Хотя официально школа предназначалась для выпуска учителей средних школ, многие выпускники как гуманитарного, так и естественного отделений избирали карьеру исследователей и становились знаменитыми, что поднимало престиж школы. В частности, почти все известные итальянские математики от Бианки и Кастельнуово до Вольтерра и Леви-Чивиты были ее выпускниками.

На вступительном конкурсном экзамене в школу от Ферми требовалось изложить свои знания по теме «Характер и причины звуков». Его «сочинение» дает представление об уровне знаний по классической физике, достигнутом Ферми в 17-летнем возрасте. Достаточно сказать, что далеко не все выпускники физических факультетов университетов (а не только средней школы) смогли бы написать такое сочинение, в котором используется метод Фурье при решении дифференциального уравнения колеблющегося стержня. Ферми сам рассказывал, что экзаменатор был удивлен его сочинением и сказал, что никогда ничего подобного в своей практике не встречал.

Хотелось бы немного прокомментировать письмо инженера Амидея. Мне кажется, что оно должно заинтересовать не только физиков и историков науки, но и более широкие круги читателей, особенно школьников, которые начинают увлекаться наукой, а также педагогов. Быть может, благодаря инженеру Амидею одаренный мальчик и стал гением. Конечно, Ферми был прирожденным физиком, но кто может сказать, какова была бы его судьба, если бы инженер Амидей отнесся к нему иначе, если бы на вопросы мальчика он отвечал, например, так: «Это пока слишком трудно для тебя. Подрастешь — поймешь!». Возможно, Ферми и не увлекся бы так серьезно математикой и физикой в тринадцатилетнем возрасте и в результате стал бы, скажем, лишь хорошим инженером или физиком. Он мог бы, например, влюбиться, мог заинтересоваться шахматами или теннисом, иностранными языками или геологией. Дело в том, что перед тринадцатилетним Ферми был только один прямой путь, который мог бы привести его туда, куда он впоследствии пришел (и этот путь был указан Амидеем), но при этом было огромное число «боковых» дорог.

Во всяком случае, я совершенно уверен в том, что Ферми стал великим Ферми именно потому, что его интересы определились и его интеллектуальные запросы уже удовлетворялись, когда он был еще мальчиком. В этом меня убеждал стиль Ферми во всем, что относилось к физике; читал ли он лекции, объяснял что-либо сотруднику, выражал ли сомнение в чем-либо, всегда создавалось впечатление, что все ему просто и знакомо, что физика для него то же, что дом родной.

Если мое суждение правильно, то число потенциальных Ферми в мире куда больше, чем это обычно представляется.

Вот что писал Энрико Персико: «...Исключительные способности Ферми в точных науках проявились очень рано; когда я познакомился с ним (ему было 14 лет), я с удивлением обнаружил, что приятель у меня не только «дока» в науке, как говорят на школьном жаргоне, но и товарищ, форма ума которого совершенно отличается от типичной для всех «умных» мальчиков и блестящих учеников, с которыми я был знаком... В области математики и физики он проявил знания по гораздо большему числу разделов, чем учили в школе, причем знания были не школярскими, и он оперировал ими совершенно непринужденно. Для него уже тогда знание теоремы или закона означало, прежде всего, умение их использовать».

Вероятно, читателя заинтересует вопрос, как учился Ферми в школе по гуманитарным предметам? Конечно, он был хорошим учеником, что не удивительно, если учесть наличие у него прекрасной памяти, но, опираясь на некоторые, впрочем, субъективные впечатления, я сказал бы, что по гуманитарным предметам Ферми был не более чем «нормальным отличником». Правда, он знал довольно много стихов наизусть, но это, я бы сказал, характеризует скорее его феноменальную память, чем страсть к поэзии. Мне помнится, где-то в 30-х годах Ферми сказал, что главным источником его общей культуры является многотомная итальянская Детская энциклопедия — довольно удачная и красочно оформленная книга для юношества. Это подтверждает, что интересы Ферми вне области физики и математики были все-таки довольно ограниченными.

Н. Б. ДЕМИДОВИЧ

КАК НАЧЕРТИТЬ n-МЕРНЫЙ КУБ?

Отрезок, квадрат, куб...

Какая разница между отрезком, квадратом и кубом? Отрезок — часть прямой линии, квадрат — часть плоскости, а куб — часть пространства. А что между ними общего, кроме слова *часть* в их определении? Оказывается, существует глубокая аналогия в процессе их построения. В самом деле, процесс построения квадрата при заданном отрезке можно, например, описать так:

из концов данного отрезка восставляем перпендикуляры к нему так, чтобы эти перпендикуляры лежали в одной плоскости; на каждом перпендикуляре по одну сторону от данного отрезка откладываем отрезки той же длины и затем соединяем концы получившихся отрезков.

Запишем теперь процесс построения куба при заданном квадрате:

из каждой вершины данного квадрата восставляем перпендикуляры к плоскости квадрата (то есть к двум сходящимся в этой вершине сторонам квадрата) так, чтобы эти перпендикуляры находились в одном пространстве; на перпендикулярах по одну сторону от квадрата откладываем отрезки, равные по длине ребрам квадрата; через концы этих отрезков проводим прямые, параллельные ребрам квадрата (то есть строим квадрат, параллельный данному).

В этой записи бросается в глаза искусственность и ненужность оборота «*чтобы эти перпендикуляры находились в одном пространстве*»: ведь наше пространство вообще одно! Но давайте пофантазируем и опишем процесс еще одного построения:

из каждой вершины данного куба восставляем перпендикуляры ко всем трем сходящимся в ней ребрам (?!) *так, чтобы эти перпендикуляры находились в одном пространстве; на этих перпендикулярах по одну сторону от куба* (?!) *откладываем отрезки, равные по длине ребрам куба; через концы этих отрезков проводим отрезки, параллельные ребрам куба и равные им по длине (то есть строим куб, параллельный данному* (?!!)).

Геометрически такое «построение», конечно, невозможно — хотя бы потому, что в нашем пространстве нельзя провести более трех попарно перпендикулярных линий. Но логически это рассуждение вполне стройное и приводит к понятию «*четырехмерного*» куба (то есть куба, в каждой вершине которого сходятся 4 попарно перпендикулярных ребра). Более того, продолжая описанные построения «по индукции», мы придем к понятию «*пятимерного*», «*шестимерного*» и в общем случае —«*n-мерного*» куба. Согласно этому рассуждению, обыкновенный куб — «трехмерный», квадрат —«двумерный», а отрезок — «одномерный» куб (рис. 1, 2, 3).

Спрашивается, а существуют ли *реальные* объекты, соответствующие по своим свойствам n-мерному кубу ($n=1, 2,\ldots$)? Оказывается, существуют; один из таких объектов будет рассмотрен в следующей главе.

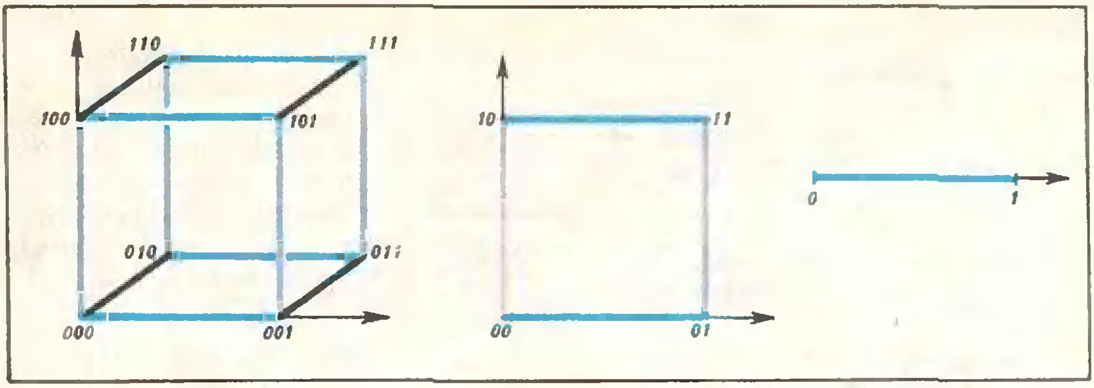


Рис. 1. Куб трехмерный

Рис. 2. Куб двумерный

Рис. 3. Куб одномерный

Таблица вершин *n*-мерного куба

О т р е з о к (одномерный куб) имеет два конца (две *вершины*). Обозначим один из концов цифрой 0, а другой — цифрой 1. Получим т а б л и ц у в е р ш и н о т р е з к а:

0
1

Множество вершин к в а д р а т а (двумерного куба) распадается на два подмножества вершин параллельных друг другу сторон. Обозначим соответствующие вершины сторон одинаковыми цифрами (0 или 1); чтобы их отличать друг от друга, добавим *слева к обозначениям вершин одной* стороны цифру 0, а другой — 1. Т а б л и ц а в е р ш и н к в а д р а т а приобретает следующий вид:

00	10
01	11

Аналогично из таблицы вершин квадрата строится т а б л и ц а в е р ш и н к у б а:

000	010	100	110
001	011	101	111

Далее — т а б л и ц а в е р ш и н «ч е т ы р е х м е р н о г о» к у б а:

0000	0010	0100	0110	1000	1010	1100	1110
0001	0011	0101	0111	1001	1011	1101	1111

Процесс построения таких таблиц можно продолжать неограниченно. Эти таблицы и представляют собой *алгебраические образы n*-мерных кубов; при этом в е р ш и н е n-мерного куба соответствует некоторый упорядоченный набор из n нулей и единиц, называемых *координатами* вершины.

Опишем теперь основные с в о й с т в а вершин и *ребер n*-мерного куба.

1) На каждом р е б р е n-мерного куба лежит ровно две его вершины; все соответственные координаты этих вершин одинаковы, за исключением одной: у одного конца ребра она равна 0, а у другого — 1. Именно эта координата и характеризует *направление* ребра.

2) Все ребра одного направления *параллельны* между собой и *перпендикулярны* к ребрам любого другого направления.

3) Число различных направлений равно n. Все они описываются *базисными ребрами*, соединяющими вершину 00... 0 с вершинами

00 . . . 01
00 . . . 10
. . .
. . .
01 . . . 00
10 . . . 00

4) Из любой вершины n-мерного куба выходит ровно n ребер. Все они попарно перпендикулярны между собой.

Для $n=1, 2, 3$ указанные свойства проверяются непосредственно (проверьте!). Для $n>3$ описанные свойства вершин и ребер куба мы будем постулировать (убедиться в их внутренней непротиворечивости предоставляем вам самим).

Параллельное проектирование

Наряду с реальным чисто алгебраическим образом — *таблицей вершин* — n-мерному кубу можно поставить в соответствие и реальный чисто геометрический образ — *чертеж*.

На рисунке 1 изображен чертеж куба. Отметим следующие его *свойства*:

1) Параллельные ребра куба остаются параллельными и на чертеже.

2) Перпендикулярные ребра куба на чертеже непараллельны.

3) Разные вершины куба на чертеже не сливаются в одну.

Иными словами, чертеж куба представляет собой как бы тень, падающую на горизонтальную площадку от освещения проволочной модели куба косыми параллельными лучами света, не лежащими в плоскости ни одной из граней.

Оказывается, если подобное параллельное проектирование применить к кубу любой размерности n, то получится плоский чертеж n-мерного куба, обладающий тремя указанными выше свойствами. Но прежде чем доказать это, посчитаем

Сколько же вершин у n-мерного куба?

Пусть A — произвольная вершина куба с координатами $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$. Так как a_i равно либо нулю, либо единице, то мы можем координаты этой вершины рассматривать как двоичное представление некоторого числа ε:

$$\varepsilon = a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + a_2 \cdot 2 + a_1$$

(тогда двоичная запись ε имеет вид:

$$\hat{\varepsilon}_2 = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1).$$

Вершинам n-мерного куба соответствуют всевозможные наборы нулей и единиц $(a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1)$; каждому же такому набору соответствует вполне определенное число ε; число $\varepsilon + 1$ получается из числа ε по следующему правилу: все правые разряды $a_1, a_2, \ldots, a_j$, подряд являющиеся единичными, заменяются на нули, первый справа нулевой (или отсутствующий) разряд a_{j+1} — на единицу, а остальные (если они есть) остаются без изменения. Представим, например, в двоичной системе числа 0, 1, 2, …, 15:

$$\hat{0}_2 = 0, \quad \hat{4}_2 = 100, \quad \hat{8}_2 = 1000,$$
$$\hat{1}_2 = 1, \quad \hat{5}_2 = 101, \quad \hat{9}_2 = 1001,$$
$$\hat{2}_2 = 10, \quad \hat{6}_2 = 110, \quad \widehat{10}_2 = 1010,$$
$$\hat{3}_2 = 11, \quad \hat{7}_2 = 111, \quad \widehat{11}_2 = 1011,$$
$$\widehat{12}_2 = 1100,$$
$$\widehat{13}_2 = 1101,$$
$$\widehat{14}_2 = 1110,$$
$$\widehat{15}_2 = 1111.$$

Легко видеть, что число 2^n в двоичной системе счисления представляется в виде единицы с n нулями, а число 2^{n-1} — набором из n единиц. Значит, существует 2^n различных двоичных чисел (от нуля до $2^n - 1$) разрядности не выше n; следовательно, число вершин n-мерного куба также равно 2^n.

Попробуем теперь построить

Чертеж n-мерного куба

Проведем на плоскости две прямые линии под углом друг к другу — назовем их основными. Отложим на одной из них (назовем ее первой) по одну сторону от точки пересечения $2^n - 1$ раз масштаб a, а на второй — n раз масштаб b (рис. 4, *а*). Пронумеруем концы масштабных отрезков на первой линии числами

$$1,\ 2, \ldots,\ 2^n - 1,$$

а на второй — числами

$$1,\ 2, \ldots,\ n.$$

Через конец каждого масштабного отрезка проведем прямую линию, параллельную другой основной линии. Получим косоугольную координатную сетку. Каждому узлу этой сетки поставим в соответствие пару целых чисел (X, Y) — косоугольные координаты узла вдоль первого и второго направлений (точка пересечения ос-

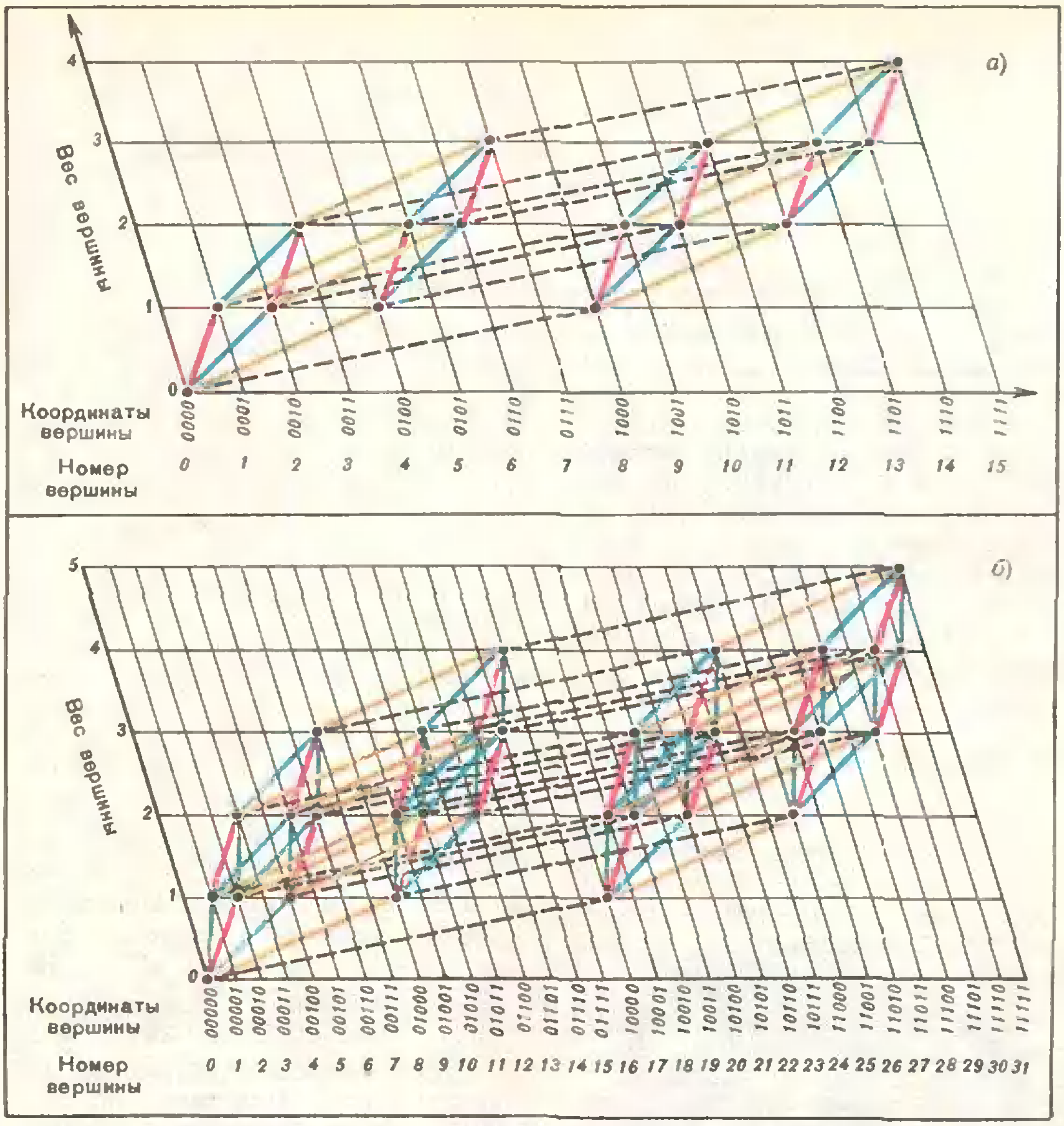


Рис. 4: *а* — куб четырехмерный; *б* — куб пятимерный

новых линий имеет координаты (0,0)). Вершину куба с координатами $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1)$ поместим в узел образовавшейся сетки с косоугольными координатами

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 2^{i-1}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{*)}.$$

Таким образом, первая косоугольная координата узла, которым мы изображаем вершину куба, равна номеру этой вершины, а вторая — ее весу $a_1 + \dots + a_n$ (то есть суммарному количеству единичных координат вершины).

Если две вершины n-мерного куба отличаются лишь одной координатой, то соответствующие им изображения вершин на косоугольной координатной сетке соединим отрезком прямой — этот отрезок будет служить изображением ребра нашего куба.

На этом построение чертежа n-мерного куба заканчивается (на рисун-

*) Знак Σ («сигма») — это знак суммирования, $\sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 + \dots + b_n$.

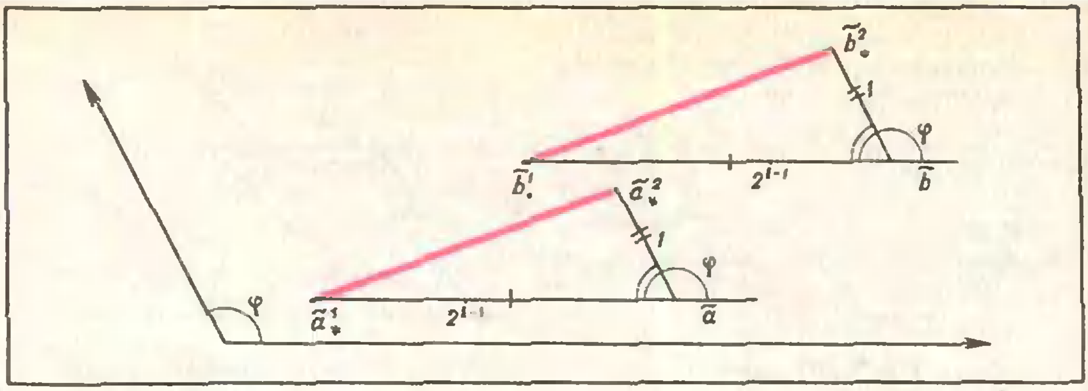


Рис. 5.

ке 4, *а* изображен чертеж четырехмерного куба, а на рисунке 4, *б*—пятимерного куба). Чтобы убедиться в том, что и в общем (*n-мерном*) случае *чертеж n*-мерного куба представляет собой результат параллельного проектирования куба на плоскость, проверим

Три свойства чертежа

Свойство 3), очевидно, выполняется: разным вершинам соответствуют разные номера, а потому их изображения имеют разные первые косоугольные координаты, и, следовательно, не совпадают.

Проверим теперь свойство 1) — сохранение параллельности ребер. Возьмем любые два параллельные ребра куба. Обозначим координаты вершин первого ребра через $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$:

$$\tilde{a}^1 = (a^1_n,\ a^1_{n-1}, \dots,\ a^1_i, \dots,\ a^1_1),$$
$$\tilde{a}^2 = (a^2_n,\ a^2_{n-1}, \dots,\ a^2_i, \dots,\ a^2_1);$$

а координаты вершин второго ребра — через $\tilde{b}^1$ и $\tilde{b}^2$:

$$\tilde{b}^1 = (b^1_n,\ b^1_{n-1}, \dots,\ b^1_i, \dots,\ b^1_1),$$
$$\tilde{b}^2 = (b^2_n,\ b^2_{n-1}, \dots,\ b^2_i, \dots,\ b^2_1).$$

Направление ребра здесь характеризуется i-й координатой.

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} a^1_j = a^2_j,\\ b^1_j = b^2_j \end{aligned}\right\}\ j \neq i.$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$a^1_i = b^1_i = 0,$$
$$a^2_i = b^2_i = 1.$$

Рассмотрим теперь изображения $\tilde{a}^1_*$, $\tilde{a}^2_*$, $\tilde{b}^1_*$, $\tilde{b}^2_*$ этих четырех вершин на косоугольной координатной сетке. Проведем через образы вершин $\tilde{a}^1_*$ и $\tilde{b}^1_*$ прямые, параллельные первому косоугольному направлению, а через образы вершин $\tilde{a}^2_*$ и $\tilde{b}^2_*$ — прямые, параллельные второму направлению (рис. 5). Точки пересечения этих прямых обозначим через $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ соответственно. Получаем два треугольника: $\tilde{a}^1_*\tilde{a}\,\tilde{a}^2_*$ и $\tilde{b}^1_*\tilde{b}\,\tilde{b}^2_*$. Вычислим длину стороны $\tilde{a}^1_*\tilde{a}$ — по построению она равна модулю разности первых косоугольных координат вершин $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a^1_j\cdot 2^{j-1} - \sum_{j=1}^{n} a^2_j\cdot 2^{j-1}\right| =$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{n}(a^1_j - a^2_j)\cdot 2^{j-1}\right| =$$
$$= (a^2_i - a^1_i)\cdot 2^{i-1} = 2^{i-1}.$$

Длина стороны $\tilde{b}^1_*\tilde{b}$ также равна 2^{i-1}. Длина второй стороны треугольника $\tilde{a}\tilde{a}^2_\bullet$ ($\tilde{b}\tilde{b}^2_\bullet$) равна модулю разности вторых косоугольных координат вершин $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$ (соответственно вершин $\tilde{b}^1$, $\tilde{b}^2$) и равна единице; действительно:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j^1 - \sum_{j=1}^{n} a_j^2\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} (a_j^1 - a_j^2)\right| = $$
$$= a_i^2 - a_i^1 = 1 - 0 = 1.$$

Итак, треугольники $\tilde{a}^1_\bullet \tilde{a}\tilde{a}^2_\bullet$ и $\tilde{b}^1_\bullet \tilde{b}\tilde{b}^2_\bullet$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, стороны $\tilde{a}^1_\bullet \tilde{a}^2_\bullet$ и $\tilde{b}^1_\bullet \tilde{b}^2_\bullet$, являющиеся изображениями ребер куба одного направления, также равны и параллельны — что и требовалось доказать.

Для доказательства свойства 2) — непараллельности изображений перпендикулярных ребер куба — достаточно убедиться в непараллельности изображений *базисных* ребер. А последнее очевидно, так как изображения базисных ребер — это отрезки, соединяющие узел (0, 0) с изображением n вершин веса 1 (их номера равны 1, 2, 4, 8,..., 2^{n-1}).

Заключение

Мы доказали возможность косого параллельного проектирования n-мерного куба на плоскость. Заметим, что чертежи кубов, изображенные на рисунках 4, *а*, *б*, обладают еще одним свойством: вершины *одинакового веса* лежат на одной прямой, параллельной первому координатному направлению. Это свойство чертежа не является необходимым для параллельного проектирования — оно, например, не имеет места на рисунке 1. Но часто именно это свойство способствует лучшему пониманию внутренней структуры такого чисто алгебраического объекта, каким является n-мерный куб.

Встреча с нашими читателями

Редакция журнала побывала в гостях у школьников подмосковного города Загорска, в библиотеке профкома Загорского оптико-механического завода. Эта библиотека — одна из крупнейших в городе, среди ее читателей много школьников, выписывающих наш журнал.

Встречу вел заместитель главного редактора журнала В. А. Лешковцев. Он рассказал о задачах, которые ставит перед собой «Квант», о статьях, которые появятся в журнале в ближайшее время. Школьники в свою очередь высказали ряд пожеланий редакции, указали разделы математики и физики, которые их особенно интересуют, подсказали ряд тем для статей. Затем сотрудники редакции ответили на вопросы читателей.

В заключение был проведен небольшой конкурс по решению задач, победители которого были награждены памятными книгами.

В. Н. Березин

О силах инерции

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

Случай в автобусе

Начнем с обыденного происшествия. Автобус резко затормозил у светофора, пассажиров потянуло вперед. Кто-то наступил впереди стоящему на ногу и, конечно, извинился. С точки зрения правил поведения все в порядке. Но физику конец истории должен показаться нелогичным. Пассажир, конечно, не виноват: виноват, наверно, зазевавшийся водитель — он-то и должен извиниться... Мы, однако, не будем увлекаться наукой о поведении, а только спросим себя, чем, собственно говоря, виноват водитель? Каким образом водитель смог толкнуть пассажиров? Ведь он сидит далеко и не может до них даже дотянуться. Можно сказать, что сила (конечно, не от водителя, а от мотора или, быть может, от тормозов) передалась через пол. Такой ответ также нельзя признать удовлетворительным: ведь ноги остаются стоять на месте — пассажиру кажется, что его потянули, скорее, за голову...

Если специально не пытаться запутать дело, то объясняется все очень просто. Шофер затормозил автобус; ноги пассажиров (из-за большого трения покоя подошв о пол) тоже затормозились, а туловище вместе с головой продолжало двигаться с прежней скоростью, повинуясь первому закону Ньютона — закону инерции. Если бы трения не было, например, все пассажиры стояли на идеальных роликах (чего не сделаешь ради науки!), то никакого толчка они сразу бы не почувствовали, а один за другим ударились бы во внезапно остановившуюся перед ними стенку кабины водителя.

Такое описание приведет всякий разумный наблюдатель, который находится в инерциальной системе координат, например, наблюдает эту сцену, стоя на тротуаре.

Но может случиться, что ту же историю захочет проанализировать другой наблюдатель, скажем, шофер автобуса, который плотно сидел в своем кресле. Он, конечно, знал, что автобус затормозил, то есть стал двигаться с ускорением относительно земли, и поэтому его система отсчета перестала быть инерциальной. Шофер так и объяснит происшествие. А что скажет пассажир, который не знал о факте торможения, но невольно ощутил его? Таким образом, мы подошли к основному вопросу — как описываются механические движения в неинерциальных системах отсчета?

Известно, что основные законы движения — законы Ньютона — справедливы только в инерциальных системах отсчета. Поэтому естественно ожидать, что при переходе к неинерциальным системам уравнения движения должны измениться. Однако, если ограничиться только классической механикой, то есть не рассматривать движений со скоростями, сравнимыми со скоростью света, то оказывается, что основное уравнение движения можно записывать точно в таком же виде, как второй закон Ньютона, если ввести новое понятие — понятие сил инерции.

Когда шофер тормозит автобус, он видит, что пассажир на роликах (то есть в отсутствие сил трения) получает относительно автобуса ускорение, направленное в ту сторону, в которую двигался автобус до торможения. Или, что то же самое, ускорение пассажира противоположно по направлению ускорению, которое получает автобус.

Это ускорение не связано непосредственно с действием какого-то тела на пассажира, но наблюдатель, находящийся в ускоренной системе координат, пытаясь описать движение с точки зрения обычных законов механики, должен будет сказать: если есть ускорение, то его надо приписать действию какой-то силы. Такие силы, вводимые в неинерциальных системах отсчета для того, чтобы описать ускоренное движение свободных тел, называют силами инерции.

Силы инерции отличаются от обычных сил, например, от электрических или гравитационных сил, прежде всего тем, что они вызваны не взаимодействием тел, а ускоренным движением самой системы отсчета. Силы инерции исчезают при переходе в инерциальную систему отсчета (наблюдатель на тротуаре), тогда как силы обычные не изменяются при переходе в любую другую систему отсчета. Обычные силы, как говорят, инвариантны относительно перехода в другую систему координат, если только скорость новой системы отсчета относительно исходной остается много меньшей скорости света*). Отмечая такое фундаментальное свойство обычных сил, иногда силы инерции называют псевдосилами («как бы» силами) или фиктивными силами.

Еще одно важное отличие сил инерции состоит в том, что с точки зрения неинерциального наблюдателя эти силы действуют во всех точках системы, где бы ни находилось исследуемое тело, причем в непосредственной близости от тела невозможно указать источник этих сил. Если бы один пассажир, стоя на роликах, толкнул другого, то они отъехали бы друг от друга в разные стороны, повинуясь третьему закону Ньютона. В тормозящем же автобусе все пассажиры подались вперед, и никто не поехал назад. В этом смысле действие сил инерции напоминает действие электрических или магнитных сил, которые передаются через электромагнитное поле и для которых тоже не так просто понять, что такое противодействие. Поэтому и в задаче о силах инерции можно ввести аналогичное понятие — поле сил инерции.

Поле и силы

Известно, что взаимодействие электрических зарядов и токов осуществляется электромагнитным полем, силы всемирного тяготения передаются гравитационным полем, силы взаи-

*) Если система отсчета движется со скоростью, сравнимой со скоростью света, то, как показывается в теории относительности, и обычные силы не остаются инвариантными. Поэтому мы ограничиваем себя классическими нерелятивистскими системами отсчета.

модействия между нуклонами — полем ядерных сил.

Во всех этих случаях взаимодействие тел происходит без непосредственного контакта. Понятие физического поля сил и было введено для описания такого сорта взаимодействий. Это понятие прочно вошло в физику и в XX веке совершенно вытеснило понятие контактных сил. Лишь на малых расстояниях иногда практически удобнее говорить о соприкосновении тел, о толчке или ударе.

Для того чтобы сохранить третий закон Ньютона, говорят об обратном воздействии тела на поле. Таким образом, например, сводят взаимодействие двух удаленных друг от друга электрических зарядов к взаимодействию заряда и поля в месте нахождения заряда.

Происшествие в автобусе тоже можно описать, используя понятие поля сил. В тормозящем автобусе, с точки зрения водителя, возникает поле сил инерции, которое действует на пассажиров. Но следует подчеркнуть, что это поле возникло из-за того, что система отсчета движется с ускорением, и оно может быть «уничтожено» переходом в инерциальную систему координат.

Таким образом, в ускоренно движущемся автобусе (мы дальше будем говорить — в системе координат) возникает поле сил инерции, замечательное, прежде всего, тем, что оно сообщает всем телам в системе, независимо от их массы, одинаковые ускорения. Эти ускорения равны по абсолютной величине ускорению системы координат и направлены в противоположную сторону.

Только одна сила в природе — сила тяготения — обладает таким же свойством. Например, в поле тяжести Земли все тела свободно падают с одним и тем же ускорением относительно инерциальной системы отсчета. Эта аналогия на самом деле имеет глубокий смысл — она отражает великий принцип эквивалентности *), фундаментальный смысл которого раскрывается в теории относительности.

А пока мы можем сформулировать важный вывод: подобно силам тяготения, силы инерции пропорциональны массе тела. Это есть следствие равенства ускорений всех свободных тел в неинерциальной системе координат.

Какие бывают силы инерции?

Принцип относительности Галилея утверждает, что в любой движущейся инерциальной системе отсчета действуют те же законы механики, что и в покоящейся системе**). Иначе говорят, что никакими опытами внутри системы наблюдатель не может узнать, движется он равномерно и прямолинейно или покоится. В частности, материальная точка, на которую в такой системе не действуют никакие тела, будет либо покоиться, либо двигаться без ускорения. К этому мы должны добавить, что точка не должна находиться ни в электрическом, ни в магнитном полях и на нее не должно действовать извне никакое массивное тело. Разумно применять принцип относительности Галилея, так сказать, в обратную сторону для установления того, является ли система отсчета инерциальной или нет. Мерой этого, очевидно, должна служить степень точности выполнения законов Ньютона в этой системе.

---

*) См., например, статью Д. Бородина «Гравитационная масса», «Квант», 1973, № 2.

Заметим, кстати, что поле тяготения Земли тоже можно «уничтожить», перейдя в другую систему координат, например, в космический корабль. Явление невесомости (когда сила тяготения «уравновешивается» силой инерции) отражает тесную связь гравитационных сил с силами инерции.

**) Принцип относительности Эйнштейна идет еще дальше, утверждая, что все законы физики (а не только механические) остаются такими же. В этой статье мы будем говорить только о классических механических явлениях.

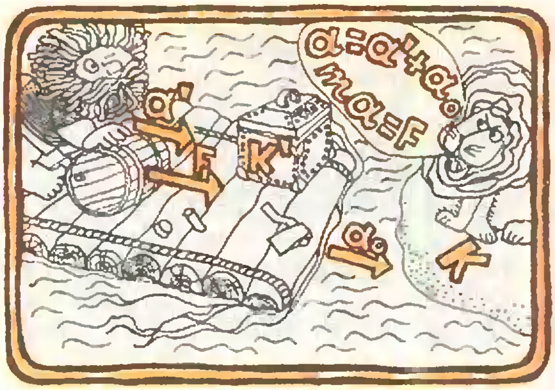


Рис. 1.

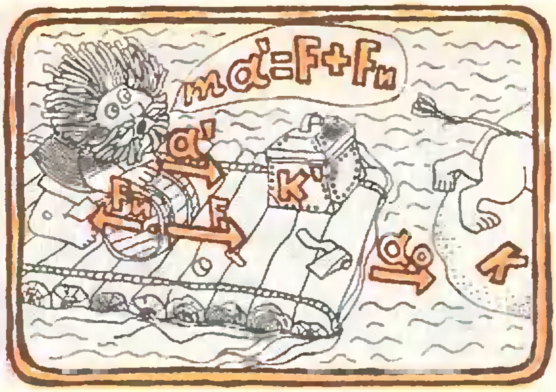


Рис. 2.

Если же мы рассматриваем движение тел в неинерциальных системах отсчета, то нельзя забывать, что кроме обычных сил взаимодействия на тела действуют еще силы инерции. Чтобы записать уравнения движения тел, надо уметь определять все силы. Обычные силы зависят от взаимного расположения тел и от их относительных скоростей. Силы инерции, вызванные ускоренным движением системы отсчета, очевидно, должны зависеть и от характера движения самой системы отсчета.

Рассмотрим два случая:

1) система отсчета относительно неподвижной инерциальной системы движется поступательно с некоторым постоянным ускорением;

2) система отсчета вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью.

В первом случае возникает только одна сила, которую так и называют силой инерции. Во втором случае надо говорить о двух силах. Первая зависит только от координат, то есть от расстояний до оси вращения; эту силу называют центробежной силой инерции. Вторая сила зависит от скорости движения тела относительно вращающейся системы отсчета, но не зависит от координат; ее называют кориолисовой силой в честь французского механика Кориолиса (1792—1843). О кориолисовой силе в этой статье мы говорить не будем.

Для того чтобы получить конкретные выражения для силы инерции при поступательном движении и для центробежной силы инерции, достаточно сопоставить движения тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета.

Поступательное движение системы отсчета

Пусть система отсчета K' движется равноускоренно с ускорением $\mathbf{a}_0$ относительно инерциальной системы K. Рассмотрим некоторое тело, на которое со стороны другого тела действует сила $\mathbf{F}$, сообщая ему ускорение $\mathbf{a}$ относительно системы K. Ускорение этого тела в системе K' обозначим $\mathbf{a}'$. Опишем движение выбранного тела с точки зрения двух наблюдателей: один связан с системой K' (будем называть его подвижным наблюдателем), другой находится в системе K (его будем называть неподвижным).

Для неподвижного наблюдателя (в инерциальной системе отсчета) тело участвует в двух движениях (рис. 1): с ускорением $\mathbf{a}'$ относительно системы K' и с ускорением $\mathbf{a}_0$ относительно системы K, поэтому его полное ускорение

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0.$$

Запишем уравнение движения тела:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

или

$$m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_0) = \mathbf{F}.$$

Последнее равенство можно переписать по-другому:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0. \qquad (1)$$

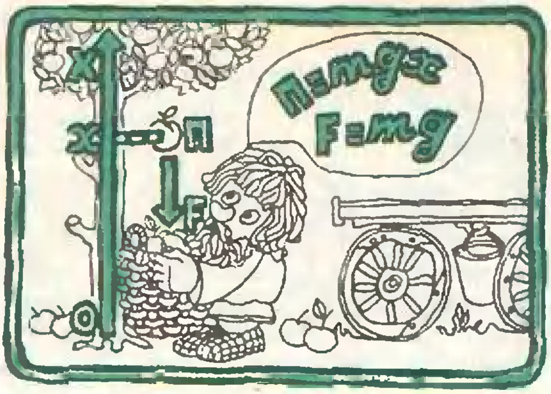


Рис. 3.

Рис. 4.

В частном случае, когда $F = 0$, в системе K ускорения нет, то есть $a = 0$, поэтому

$$\mathbf{a}' = -\mathbf{a}_0.$$

Таким образом, подвижный наблюдатель обнаружит, что все свободные тела в его системе имеют ускорение, равное по абсолютной величине ускорению самой системы отсчета, но направленное в противоположную сторону. Можно сказать, что в этой системе есть поле сил, которое действует на тела с силами $\mathbf{F}_и$, называемыми силами инерции.

Итак, с точки зрения подвижного наблюдателя уравнение движения тела в общем случае надо записать так (рис. 2):

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_и. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), нетрудно заметить, что

$$\mathbf{F}_и = -m\mathbf{a}_0.$$

То есть в случае поступательного движения неинерциальной системы отсчета сила инерции зависит от ускорения этой системы, которое легко измерить на опыте. Заметим также еще раз, что сила инерции (подобно силе тяжести) пропорциональна массе тела.

Потенциал поля сил инерции

Многие физические поля сил можно охарактеризовать энергетически с помощью понятия потенциала или потенциальной энергии тела в этом поле. Можно это сделать и для поля сил инерции, воспользовавшись аналогией с полем тяжести Земли. Сходство этих полей состоит, прежде всего, в том, что все свободные тела в ускоренной системе отсчета движутся с одинаковыми ускорениями, не зависящими от их масс.

Известно, что вблизи поверхности Земли (где ускорение свободного падения постоянно) тело массой m обладает потенциальной энергией

$$П = mgx,$$

где x — высота тела над поверхностью Земли (рис. 3). Заметим, кстати, что величину $\varphi = gx$ называют потенциалом поля тяжести. При перемещении тела с высоты x_1 на высоту $x_2 < x_1$ поле совершает работу

$$A = mg(x_1 - x_2) = -(П_2 - П_1),$$

то есть работу, равную убыли потенциальной энергии тела. Эта работа идет на увеличение кинетической энергии тела: на сколько уменьшилась потенциальная энергия, настолько же увеличилась кинетическая энергия, так что сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной. Поэтому полная энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgx$$

остается неизменной, сохраняется во время движения.

Если система отсчета K' ускоряется в направлении оси x' (рис. 4) и

Рис. 5.

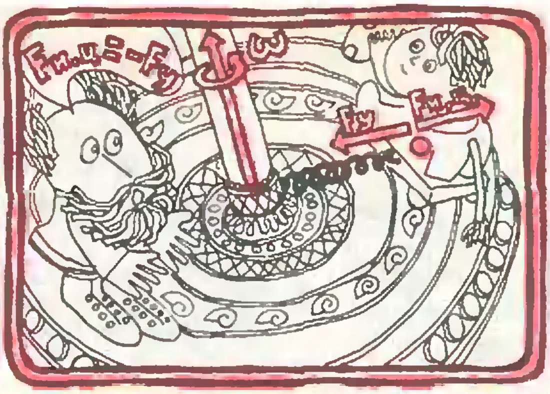


Рис. 6.

все свободные тела «падают» с ускорением a_0, равным ускорению движения самой системы, то по аналогии выражение для потенциальной энергии тела массой m в поле сил инерции можно записать так:

$$\Pi' = m a_0 x',$$

где x' — координата тела в системе K'. Величину $\varphi' = a_0 x'$ разумно назвать потенциалом поля сил инерции.

Тогда полная энергия тела в ускоренной системе отсчета равна

$$E' = \frac{mv'^2}{2} + m a_0 x',$$

где v' — скорость тела. Причем, величина полной энергии все время остается постоянной.

Центробежная сила инерции

Рассмотрим теперь систему отсчета, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси. Такой системой может быть, например, вращающийся диск. Мы уже говорили о том, что в случае вращающейся системы отсчета надо говорить о двух силах инерции — центробежной и кориолисовой. Ограничимся рассмотрением только центробежной силы инерции. Эта сила зависит от координаты тела и не зависит от того, покоится оно или движется относительно вращающейся системы отсчета, поэтому для простоты рассуждений будем считать, что тело неподвижно.

Пусть на гладком вращающемся диске лежит тело, которое с помощью пружины удерживается на диске на расстоянии r от оси вращения. Опишем его поведение с точки зрения неподвижного и подвижного наблюдателей.

Неподвижный наблюдатель (связанный с инерциальной системой отсчета) скажет, что поскольку тело движется по окружности, то оно имеет ускорение, называемое центростремительным и равное по величине

$$a_ц = \omega^2 r.$$

Это ускорение телу сообщает сила упругости растянутой пружины $\mathbf{F}_у$, поскольку никакие другие тела в горизонтальной плоскости на тело не действуют (рис. 5). Согласно второму закону Ньютона

$$m\mathbf{a}_ц = \mathbf{F}_у.$$

С точки зрения подвижного наблюдателя (связанного с вращающейся неинерциальной системой отсчета) тело покоится, следовательно, сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю. Поэтому этот наблюдатель должен сказать, что есть сила, уравновешивающая силу упругости (рис. 6). Это — центробежная сила инерции $\mathbf{F}_{и.ц}$, равная

$$\mathbf{F}_{и.ц} = -\mathbf{F}_у = -m\mathbf{a}_ц.$$

Знак «минус» говорит о том, что эта сила направлена противоположно центростремительному ускорению, то есть по радиусу от оси вращения, и равна по величине $F_{и.ц} = m\omega^2 r$.

Рис. 7.

Здесь уместно заметить, что существует досадная двусмысленность в сложившейся терминологии. Дело в том, что в неподвижной системе отсчета силу, с которой движущаяся по окружности материальная точка действует (по третьему закону Ньютона) на тело, удерживающее ее на окружности (на пружину в нашем примере), называют также центробежной силой. С этой силой никогда не надо путать центробежную силу инерции (это последнее, самое главное слово часто опускают), которая действует на любое тело во вращающейся (неинерциальной) системе отсчета. Эти две силы проявляются в разных системах отсчета и приложены к разным телам (рис. 7).

Потенциал поля центробежных сил инерции

Подсчитаем работу, которую совершает поле центробежных сил инерции по перемещению материальной точки массой m. Пусть начальная координата точки (расстояние от оси вращения) равна r_1, а конечная — r_2. Центробежная сила инерции равна $m\omega^2 r$ и направлена от оси вращения.

Если $r_2 - r_1$ мало, то можно записать

$$A = F_{\text{н.ц}}\Delta r = m\omega^2\frac{r_1 + r_2}{2}\Delta r,$$

заменив среднюю силу $F_{\text{н.ц}}$ силой в средней точке. Подставив вместо Δr значение $r_2 - r_1$, получим

$$A = \frac{m\omega^2 r_2^2}{2} - \frac{m\omega^2 r_1^2}{2}.$$

С другой стороны, работа всегда равна изменению потенциальной энергии, взятому с обратным знаком, то есть

$$A = -(\Pi_2' - \Pi_1').$$

Сравнивая два выражения для работы, заметим, что величину

$$\Pi' = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

можно назвать потенциальной энергией материальной точки в поле центробежных сил инерции, а величину $\varphi' = -\frac{\omega^2 r^2}{2}$ — соответственно потенциалом этого поля.

Тогда для вращающейся системы отсчета полная энергия точки при движении равна

$$E' = \frac{mv'^2}{2} - \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

и величина ее остается постоянной.

Напомним, однако, что во вращающейся системе отсчета действует еще одна сила инерции (сила Кориолиса), зависящая от скорости материальной точки. Поэтому, для того чтобы записать уравнение второго закона Ньютона в этой системе, недостаточно знать выражение для полной энергии. Но об этом будет рассказано в другой статье.

В заключение приводим несколько задач, причем читателям самим предлагается ввести все исходные данные, необходимые для решения этих задач.

Упражнения

1. В вагоне на полке лежал грузик, скрепленный со стенкой с помощью пружинки. Когда поезд стал двигаться с ускорением, грузик на пружинке начал колебаться. Найти период его колебаний.

2. На этот раз грузик висел на веревочке. При ускоренном движении поезда он начал колебаться. Найти период колебаний и положение равновесия этого математического маятника.

3. В трубке, прикрепленной к тележке и изогнутой под прямым углом, налита вода, заполнившая горизонтальное колено. На какую высоту поднимается вода в вертикальном колене, когда тележка начинает двигаться ускоренно?

4. Чемодан, лежащий на полке, был привязан веревкой. При каком ускорении поезда веревка оборвется? Как влияет трение чемодана о полку?

5. Пружину с грузиком вращают с угловой скоростью ω. Как будет колебаться грузик?

6. В цилиндрическом сосуде находится кислород. Сосуд вращается вокруг оси. Как изменяется давление газа по радиусу сосуда?

Задачи

1. Направо и налево от нуля выписывают числа натурального ряда:
...6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7...

Затем, отсчитывая от правой единицы, зачеркивают каждое третье число (и налево, и направо), отсчитывая от левой единицы — каждое пятое число, отсчитывая от правой двойки — каждое седьмое число, отсчитывая от левой двойки — каждое девятое число и так далее. Доказать, что в результате слева незачеркнутыми останутся все такие числа k, что $4k+1$ — простое число, а справа — все такие числа m, что $4m-1$ — простое число.

2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки L_1, M_1, N_1 и L_2, M_2, N_2, причем так, что

$$\frac{AL_1}{L_1B}=\frac{BL_2}{L_2A},$$
$$\frac{BM_1}{M_1C}=\frac{CM_2}{M_2B},$$
$$\frac{CN_1}{N_1A}=\frac{AN_2}{N_2C}.$$

Доказать, что площади треугольников $L_1M_1N_1$ и $L_2M_2N_2$ равны.

3. На стороны треугольника ABC опущены высоты AD, BE и CF. Доказать, что

а) площадь треугольника, вершинами которого являются середины H, K и L проведенных высот, равна $1/4$ площади треугольника DEF;

б) обозначим через θ, φ и ψ соответственно углы (отсчитываемые против хода часовой стрелки), которые образуют прямые HK и AB, KL и BC, LM и CA; тогда справедливо равенство

$$(\cos^2 A+\cos^2 B)\operatorname{tg}\theta+(\cos^2 B+\cos^2 C)\operatorname{tg}\varphi+(\cos^2 C+\cos^2 A)\times\operatorname{tg}\psi=0.$$

А. К. КИКОИН

ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ, СПОРТ...

«Горы в моей жизни играли очень большую эмоциональную роль; нетронутая природа приносила ни с чем не сравнимое духовное умиротворение. К этому присоединяется глубокое удовлетворение от преодоления препятствий. В горах зарождается скрепленная опасностями дружба с товарищами, остающаяся на всю жизнь.»

И. Е. Тамм

«Идет к вершинам
Игорь Тамм,
А мы за Таммом
по пятам...»

Эти незамысловатые стихи содержались в одном из приветствий, обращенных в день семидесятилетнего юбилея к академику Игорю Евгеньевичу Тамму. Вершины, о которых говорится в этом двустишии,— это не аллегорические вершины науки, а вершины в буквальном смысле этого слова — вершины высоких гор.

Физикам всего мира лауреат Нобелевской премии по физике академик И. Е. Тамм известен как автор многих выдающихся научных работ по теории ядерных сил, теории особых состояний электронов на поверхности кристалла («уровни Тамма»), теории излучения быстрых электронов в веществе, теории плазмы в магнитном поле и многих других. Но альпинистам в нашей стране И. Е. Тамм был известен также как энтузиаст высокогорного спорта. И. Е. Тамм был одним из первых восходителей на вершины Алтая, а одна из вершин этого района носит его имя (пик Тамма).

Альпинисты знают и многих других ученых — физиков и математиков — любителей гор и восхождений. Известный советский математик член-корреспондент

Нильс Бор на лыжах.

Фредерик и Ирэн Жолио-Кюри перед лыжным походом.

Фредерик Жолио-Кюри с сыном на рыбалке.

◀ И. Е. Тамм и заслуженный мастер спорта инженер-электрик Е. А. Козакова. Кавказ. 1960 г. (Фотография публикуется впервые.)

Альберт Эйнштейн на яхте.

◀

Энрико Ферми «подкармливает» себя и... свои лыжи.

▶

Немало времени провели вместе Игорь Евгеньевич и Поль Дирак не только за обсуждением актуальных проблем физики, но и путешествуя в горах, совершая совместные восхождения на Кавказе, в Шотландии. (Фотография публикуется впервые.)

▶

И. Е. Тамм в горах

Академии наук СССР Борис Николаевич Делоне не только сам совершил немало восхождений на вершины, но и был организатором первого альпинистского лагеря в нашей стране. Этим он положил начало той системе обучения и спортивного совершенствования альпинистов, которая сделала советских альпинистов сильнейшими в мире.

Другой математик, академик Александр Данилович Александров, также известен не только как автор выдающихся работ по геометрии, но и как мастер спорта СССР по альпинизму, совершивший ряд труднейших восхождений на Кавказе и в других районах страны. Отличный горнолыжник, он, будучи ректором Ленинградского государственного университета, не раз выигрывал соревнования по слалому у молодых своих питомцев — студентов университета.

Многие другие физики и математики и в нашей стране, и за рубежом, в том числе и самые прославленные из них, увлекались высокогорным спортом. Не раз совершали восхождения на вершины гор такие корифеи физики, как Нильс Бор, Вернер Гейзенберг. Горные походы, пешие и даже велосипедные, любил совершать Энрико Ферми. Известный физик Джон Тиндаль (явление рассеяния света в мутных средах носит название эффекта Тиндаля) первым совершил восхождение на одну из труднейших альпийских вершин — Маттергорн.

Но альпинизм — не единственный вид спорта, которым увлекаются физики и математики. О Нильсе Боре рассказывают, что однажды, когда он прогуливался по улицам Копенгагена с приехавшим к нему физиком из Германии, последний обратил внимание на то, что множество прохожих приветствует Бора. Заграничный гость выразил Бору свой восторг по пово-

ду высокого культурного уровня датчан, так хорошо знающих своего знаменитого физика. Но Бор ответил ему, что приветствующим его прохожим он известен вовсе не как физик, а как... боксер... Бор был также отличным яхтсменом, а во время пребывания его в США в период работы над атомной бомбой Н. Бор удивлял молодых американских физиков своим искусством горнолыжника. Ему было в то время около 60 лет...

На первый взгляд увлечение ученых спортом кажется странным. Многие ведь считают, что успешная научная работа требует, чтобы ей отдавалось все время ученого. Где уж тут выкроить время для путешествий по горам? Но недаром восточная пословица говорит, что отдых принадлежит труду, как ночь дню. Отдых необходим каждому, кто трудится. Но отдыхать — значит отключиться от того, чем занят во время труда. А ученому отключиться от науки очень трудно. И лучший способ отключения — это занятия спортом. Да еще таким, который требует большой и продолжительной физической нагрузки и связан с сильными впечатлениями. Именно таков альпинизм: движение вверх, с тяжелым рюкзаком, в условиях постоянной опасности, наилучшим образом заставляет забыть о том, чем весь год был занят мозг... Возможно, что именно поэтому многие физики и математики отдают предпочтение альпинизму. Но, как мы видели, и другие виды спорта не чужды им.

Спорт, любой вид спорта — лучший отдых для тех, кто занимается наукой. Да и для тех, кто еще только изучает ее!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Вступительная контрольная работа в ВЗМШ в 1974 году

Решения задач

А. Л. Тоом

В этом номере мы публикуем решения наиболее интересных задач из вступительной работы в ВЗМШ 1974 года (см. «Квант», 1974, № 1, с. 73).

Задача 1. *Три друга сыграли несколько партий в шахматы, причем каждые двое сыграли друг с другом одинаковое количество партий. Потом стали решать, кто победитель. Первый сказал: «У меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей». Второй сказал: «У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей». Но когда подсчитали очки, то оказалось, что больше всех очков набрал третий (выигрыш — 1 очко; ничья — 1/2 очка, проигрыш — 0). Могло ли так быть? Если нет — докажите, если да — приведите пример.*

Да, так могло быть. Вот пример, доказывающий это. Пусть каждые двое сыграли по 7 партий, причем из них:

первый выиграл у второго две партии;

второй выиграл у первого две партии;

первый выиграл у третьего три партии;

третий выиграл у первого четыре партии.

Остальные партии закончились вничью.

Задача 2. *Существуют ли три положительных целых числа a, b, c таких, что a меньше 1974, b на 1575 меньше c и $a^2+b^2=c^2$?*

Да, такие числа существуют. Можно было бы просто их выписать, но мы объясним, как их найти, и попутно покажем, что эта тройка чисел единственна.

По условию,

$$\begin{cases} c^2-b^2=a^2, \\ c-b=1575, \\ a<1974. \end{cases}$$

Из этой системы видно, что a^2 делится на $1575=3^2\cdot5^2\cdot7$. Поэтому a делится на $3\cdot5\cdot7=105$.

Положим $a=105\,k$. Из неравенства $a<1974$ следует, что $1\leqslant k\leqslant 18$. Тогда

$$c=\frac{1}{2}(7k^2+1575),$$

$$b=\frac{1}{2}(7k^2-1575),$$

откуда $k>15$. При $k=16$ и $k=18$ число b получается нецелым. Остается только $k=17$. Тогда

$$a=1785,\ b=224,\ c=1799.$$

Легко убедиться, что эти числа удовлетворяют условию.

Задача 6. *Точка D лежит на биссектрисе угла ACB. На луче AC выбрали точки A_1 и A_2, а на луче CB — точки B_1 и B_2 так, что четыре точки A_1, C, B_1, D лежат на одной окружности и четыре точки A_2, C, B_2, D тоже лежат на одной окружности. Докажите, что $A_1A_2=B_1B_2$.*

Введем обозначения: $CD=a$, $\angle ACD=\angle BCD=\alpha$. Нам надо проделать два аналогичных построения. Чтобы не писать два раза почти одно и то же, введем переменную n, принимающую два значения: 1 и 2, и опишем построение один раз, употребляя переменную n (см. рис. 1). Продолжим

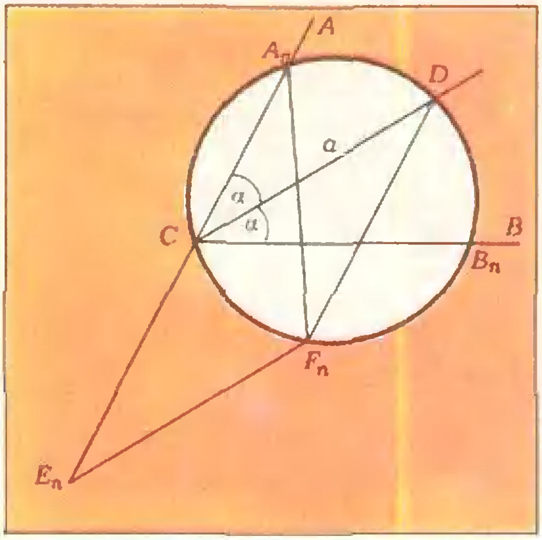


Рис. 1.

AC за точку C на отрезок $CE_n = CB_n$. Отложим на дуге CB_nD дугу DF_n, равную дуге CB_n. Очевидно, $\angle CDF_n = \alpha$ и $DF_n = CB_n = CE_n$. Поэтому, учитывая соотношение $\angle A_nCD = \angle CDF_n$, получаем, что CDF_nE_n — параллелограмм, и $E_nF_n = CD = a$. Далее, $\angle CA_nF_n = \angle CDF_n$, поскольку они опираются на одну дугу CF_n; поэтому $\angle E_nA_nF_n = \alpha$.

Таким образом, в треугольнике $E_nF_nA_n$

$$E_nF_n = F_nA_n = a,$$
$$\angle E_nF_nA_n = 180° - 2\alpha.$$

Поэтому треугольники $E_1F_1A_1$ и $E_2F_2A_2$ равны по первому признаку.

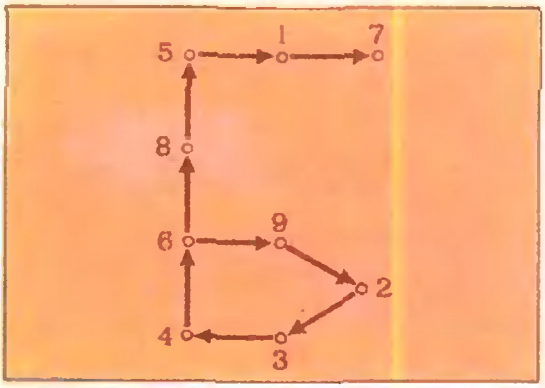


Рис. 2.

Тогда

$$E_1A_1 = E_2A_2,$$
$$B_1C + A_1C = B_2C + A_2C,$$
$$B_1C - B_2C = A_2C - A_1C,$$

откуда $B_1B_2 = A_1A_2$, что и требовалось доказать.

Задача 7. *Подряд в строчку выписаны 1974 цифры. Каждое двузначное число, записываемое двумя соседними цифрами (в том порядке, в каком они написаны), делится на 17 или на 23.*

а) Последняя цифра 1. Какова первая?

б) Первая цифра 9. Какова последняя?

Удобно начертить «граф» (схему из стрелок), как показано на рисунке 2. В нем стрелка из цифры x в цифру y означает, что y может следовать за x, то есть двузначное число $\overline{xy}$ делится на 17 или на 23.

Мы видим, что перед 1 может стоять только 5, перед 5 — только 8 и так далее, каждая цифра однозначно определяет предыдущую. При этом, если мы идем по стрелкам назад от цифры 1, то цифры, начиная с 6, повторяются с периодом 5. Поэтому, если 1974-я цифра 1, то 1971-я цифра 6, а так как дальше — повторение с периодом 5, то первая цифра тоже 6.

Пусть теперь первая цифра 9. Пойдем по стрелкам вперед. После 9 может стоять только 2, после 2 только 3, после 3 только 4, после 4 только 6, а вот после 6 может стоять и 9, и 8. Но после 8 должно стоять 5, 1, 7, а после 7 ничего стоять не может.

Таким образом, 8 может появиться не раньше чем на 1971-м месте, а до тех пор после 6 может стоять только 9. Цифра 6 в первый раз появилась на 5-м месте и будет повторяться с периодом 5. Значит, на 1970-м месте будет 6. На 1971-м, как мы выяснили, может быть 9 или 8, а на 1974-м месте может быть 4 или 7.

Задача 8. *Периметр выпуклого четырехугольника $ABCD$ равен 10, его стороны AB и CD параллельны.*

Найдите длины всех сторон, если известно, что биссектрисы углов A и B четырехугольника делят сторону CD на три равные части, а биссектрисы углов C и D делят сторону AB на три равные части.

В этой задаче возможны четыре случая, схематически изображенные на рисунках 3, 4, 5, 6. Рисунки не воспроизводят действительных длин сторон или величин углов, показан только порядок следования точек пересечения биссектрис AE, BH, CK, DM со сторонами.

I случай (рис. 3). Пусть $AM = MK = KB = a$. Заметим, что

$$\angle AMD = \angle CDM = \angle ADM. \quad (*)$$

Поэтому $AD = a$. Аналогично $BC = DE = EH = HC = a$. Поэтому периметр четырехугольника равен $8a$, откуда $a = 5/4$. Ответ для этого и других случаев дан в таблице.

II случай (рис. 4). Пусть $AK = KM = MB = a$. Равенства $(*)$ снова верны, поэтому $AD = 2a$, и аналогично $BC = DE = EH = HC = 2a$. Периметр равен $13a$, откуда $a = \frac{10}{13}$.

III случай (рис. 5) аналогичен случаю II.

IV случай (рис. 6). Пусть $AK = KM = MB = a$. Используя те же равенства углов $(*)$, получаем: $AD = BC = 2a$, $DE = HC = 2a$, откуда $DH = HE = EC = a$. Периметр равен $10a$, откуда $a = 1$.

Ответы:

стороны \ случаи	I	II	III	IV
AB	15/4	30/13	60/13	3
BC	5/4	20/13	20/13	2
CD	15/4	60/13	30/13	3
DA	5/4	20/13	20/13	2

Задача 9. а) *Перечислите все возможные прямоугольники, у которых длины сторон больше 10 и которые можно разрезать на 28 прямоугольников размером 3×5.*

б) *Можно ли 28 брусками размером $3\times5\times10$ заполнить какую-нибудь прямоугольную коробку $a\times b\times c$, где $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 10$?*

а) Очевидно, площадь такого прямоугольника равна $28\cdot3\cdot5=420$. Длины его сторон — целые числа. Значит, надо разбить число $420=2^2\cdot3\cdot5\cdot7$ на два целых множителя, каждый из которых больше 10. Рассмотрим тот множитель, который делится на 7.

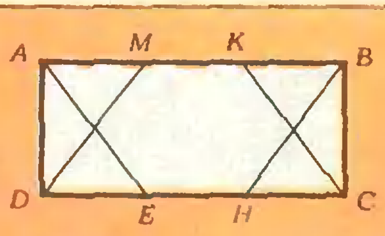


Рис. 3.

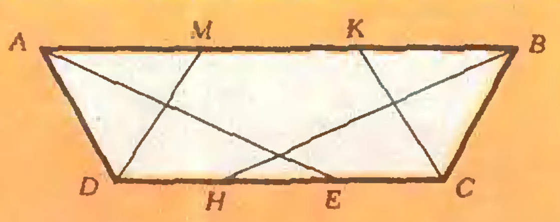


Рис. 5.

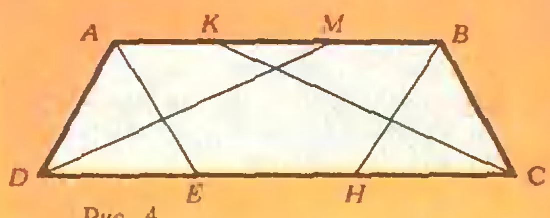


Рис. 4.

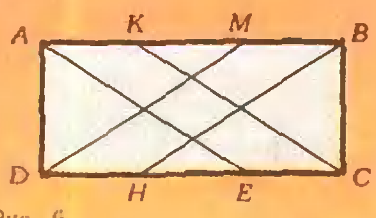


Рис. 6.

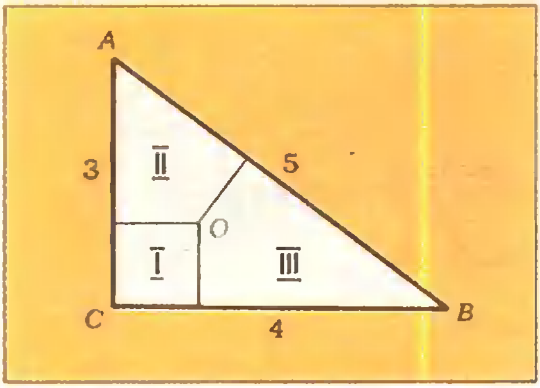


Рис. 7.

Он больше 10 и меньше 42 (иначе второй множитель не больше 10).

Получаем четыре случая: 1) 14×30; 2) 21×20; 3) 28×15; 4) 35×12.

Мы выяснили, что никакой прямоугольник, отличный от четырех перечисленных, не годится. Подходят ли эти четыре?

Заметим, что если длина одной стороны прямоугольника делится на 3, а второй — на 5, то такой прямоугольник можно разрезать на прямоугольники размером 3×5. Отсюда сразу следует, что прямоугольники размером 21×20 и 35×12 подходят.

Прямоугольник размером 14×30 разрежем сначала на два прямоугольника: 9×30 и 5×30. Оба они могут быть разрезаны на прямоугольники размером 3×5, значит, прямоугольник размером 14×30 тоже подходит.

Прямоугольник размером 28×15 можно разрезать на прямоугольники 25×15 и 3×15.

Значит, все четыре прямоугольника подходят.

б) Да, можно. Приведем пример, доказывающий это. Пусть

$$a=20,\quad b=15,\quad c=14.$$

Разрежем эту коробку размером $20\times15\times14$ на две: размером $20\times15\times9$ и $20\times15\times5$.

В каждой из двух полученных коробок одно измерение делится на 3, другое — на 5, третье — на 10. Поэтому каждую из них, конечно, можно заполнить брусками $3\times5\times10$. Всего брусков получится 28.

З а д а ч а 10. *Существует ли девятизначное число, записываемое цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, у которого нельзя вычеркнуть пять цифр так, чтобы оставшиеся четыре шли в порядке возрастания или в порядке убывания?*

Да, существует. Докажем, например, что годится такое число:

321 654 987.

Легко проверить, что если какие-то две цифры этого числа стоят в у б ы в а ю щ е м порядке (меньшая стоит правее большей), то они обязательно из одной тройки. Значит, в этом числе нельзя выбрать больше трех цифр, стоящих в убывающем порядке, поскольку все эти цифры должны находиться в одной тройке.

Если же какие-то цифры этого числа стоят в в о з р а с т а ю щ е м порядке, то они обязательно из разных троек. Поскольку троек всего три, то нельзя выбрать более трех цифр, стоящих в возрастающем порядке.

Существуют и другие примеры. Например, годится число

638 159 274,

докажите это самостоятельно.

З а д а ч а 11. *Можно ли указать внутри треугольника со сторонами 3, 4, 5 точку, расстояния от которой до каждой из сторон треугольника: а) меньше 2; б) меньше 1?*

а) Можно, подходит центр вписанной окружности (ее радиус равен 1).

Ответ на вопрос б): нет, нельзя. Докажем это. Проведем из центра O вписанной окружности радиусы ко всем точкам касания со сторонами и обозначим римскими цифрами части, на которые разделился наш треугольник (см. рис. 7). Легко доказать, что если искомая точка M находится в части I (включая границу), то расстояние от M до AB не меньше 1. Аналогично, если M — в части II, то расстояние от M до BC не меньше 1, а если M — в части III, то расстояние от M до AC не меньше 1.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 октября 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М276, М277» или «... Ф288».
Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные отмечены звездочкой.
В этом номере, как и в предыдущем, «Задачник «Кванта» составлен из задач последней Всесоюзной олимпиады и их обобщений. Полный набор задач олимпиады и подробный рассказ о заключительном туре мы поместим в № 10 за этот год.

Задачи

М276—М280; Ф288—Ф292

М276. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что угол DHQ — прямой. (10 кл.)

Н. Б. Васильев

М277. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки. (10 кл.)

А. М. Штейнберг

М278. а) Каждая из сторон выпуклого шестиугольника имеет длину больше 1. Всегда ли в нем найдется диагональ длины больше 2?

б) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ длины диагоналей AD, BE и CF больше 2. Всегда ли у него найдется сторона длины больше 1? (8 кл.)

Н. Х. Агаханов

М279. На n карточках, выложенных по окружности, записаны числа, каждое из которых равно $+1$ или -1. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка определить произведение всех n чисел, если за один вопрос разрешается узнать

а) произведение чисел на любых трех карточках?

б) произведение чисел на любых трех карточках, лежащих подряд?

(n — натуральное число, большее 3). (9 кл.)

Ю. И. Ионин

М280*. Дан треугольник ABC площади 1. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Какую минимальную площадь может иметь общая часть треугольников $A_1B_1C_1$ и KLM, если точки K, L и M лежат соответственно на отрезках AB_1, CA_1 и BC_1? (10 кл.)

Б. М. Ивлев

Ф288. Сосуд C (рис. 1) сообщается с окружающим пространством через малое отверстие. Температура газа в окружающем пространстве T, давление p. Газ настолько разрежен, что молекулы при пролете в сосуд и из сосуда на протяжении размеров отверстия не сталкиваются друг с другом. В сосуде поддерживается температура $4T$. Каким будет давление в сосуде? (9 кл.)

Ф289. По сторонам прямого угла скользит жесткая палочка длины $2l$, в центре которой закреплена бусинка массы m. Скорость точки B постоянна и равна v (рис. 2). Определить, с какой силой действует бусинка на палочку в тот момент, когда $\alpha = 45°$. (8 кл.)

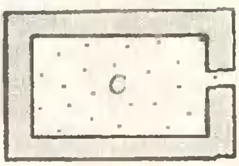


Рис. 1.

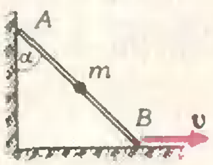


Рис. 2.

Ф290. Трубка, в которой находится пружинка с прикрепленным к ней шариком, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через конец трубки. Свободный конец пружинки прикреплен к трубке (рис. 3). График зависимости силы упругости пружины F от деформации представлен на рисунке 4.

Нарисуйте примерный график зависимости смещения шарика вдоль трубки от угловой скорости при увеличении ее от нуля до такой величины,

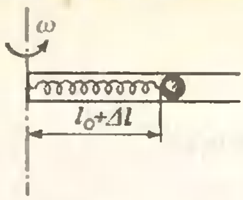


Рис. 3.

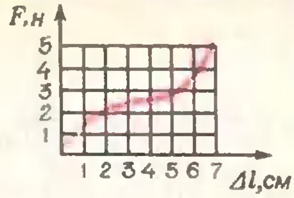


Рис. 4.

когда $F = 5$ *н*. Как изменится эта зависимость при уменьшении угловой скорости? $l_0 = 2$ *см*. (8—9 кл.)

Ф291. Два одинаковых конденсатора A и B, каждый емкостью C, и катушка с индуктивностью L соединены как показано на рисунке 5.

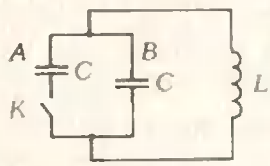


Рис. 5.

Рис. 6.

В начальный момент ключ K разомкнут, конденсатор A заряжен до разности потенциалов U. Заряд конденсатора B и ток в катушке равны нулю. Определите максимальное значение тока в катушке после замыкания ключа. (10 кл.)

Ф292. Из одной точки на дне горизонтального кругового желоба разлетаются шарики под небольшими углами к образующей желоба с одинаковыми проекциями скорости вдоль этой образующей (рис. 6). Встретятся ли эти шарики? (10 кл.)

Решения задач

М236—М240; Ф243—Ф247

М236. *а) Имеется* 51 *двузначное число. Докажите, что из этих чисел можно выбрать по крайней мере* 6 *чисел так, чтобы никакие два из выбранных чисел ни в одном разряде не имели одинаковой цифры.*

б) Даны натуральные числа k и n, $1 < k < n$. Для какого наименьшего m верно следующее утверждение: при любой расстановке m ладей на доске размером $n \times n$ можно выбрать k ладей из этих m так, чтобы никакие две из выбранных ладей не били друг друга?

Решим сначала задачу б). Докажем, что если $m = n(k-1)+1$, то в с е г д а можно выбрать k ладей так, чтобы никакие две из них не били друг друга. (То, что $n(k-1)$ ладей недостаточно,— очевидно: их можно расставить в первых $k-1$ столбцах и тогда больше чем $k-1$ выбрать невозможно.) Итак, $m = n(k-1)+1$. Покажем, что из этих m ладей всегда можно выбрать такую, что в ее *«кресте»* — проходящих через ладью столбце и строке — стоит не более $n+k-2$ ладьи. Пусть этого сделать нельзя. Выберем среди всех *рядов* (строк и столбцов) тот, в котором ладей больше всего; обозначим их число через l. По предположению в кресте каждой из этих ладей стоит больше $n+k-2$ ладьи; значит, всего ладей не меньше $l(n+k-l)$, причем $l \geq n+k-l$ и $n \geq l$, то есть $l \geq k$. Теперь уже легко заметить, что $l(n+k-l)$ не меньше $n \cdot k$, что больше $m = n(k-1)+1$, если n больше единицы. Получили противоречие; поэтому найдется ладья, крест которой содержит не более $n+k-2$ ладьи. Отметим эту ладью и вырежем ее крест из доски. Из оставшихся частей составим доску размерами $(n-1) \times (n-1)$. На новой доске будет не меньше $m-(n+k-2) = n(k-1)+1-(n+k-2) = (n-1)(k-2)+1$ ладей.

Предположим теперь, что для досок $r \times r$, где $r < n$, утверждение уже доказано (проверьте его, например, для $n = 3$, $k = 2$). Тогда на доске $(n-1) \times (n-1)$ из $(n-1) \cdot (k-2)+1$ ладей всегда можно выделить $(k-1)$ ладью так, что никакие две не бьют друг друга. Добавляя к ним выбранную ранее ладью, получим нужные k ладей.

Задача а) следует из задачи б), если взять $n = 10$, а $k = 6$. В самом деле, обозначим произвольное двузначное число через $\overline{xy}$ ($x = 1, \ldots, 9$; $y = 0, 1, 2, \ldots, 9$). Будем считать, что ладья соответствует числу $\overline{ab}$, если она стоит в a-й строке доски и b-м столбце (нумерацию строк и столбцов доски начинаем с нуля; ладьи все будут размещаться даже в прямоугольнике 9×10). Две ладьи бьют друг друга тогда и только тогда, когда у соответствующих им чисел совпадают цифры в одном из разрядов. Мы уже знаем, что из $10 \cdot 5+1 = 51$ ладей всегда можно выбрать шесть таких, что никакие две не бьют друг друга. Тем самым задача полностью решена.

Л. Г. Лимонов

М237. *Углы остроугольного треугольника равны α, β и γ. Какие массы нужно поместить в его вершинах, чтобы центр тяжести этих трех масс попал*

а) в точку пересечения высот?

б) в центр описанной окружности?

Стороны треугольника равны a, b и c. Какие массы нужно поместить в его вершины, чтобы центр тяжести попал

в) в точку пересечения отрезков, соединяющих вершины и точки касания противоположных им сторон со вписанной окружностью?

г) в центр вписанной окружности?

Пусть в вершинах треугольника ABC расположены массы m_a, m_b и m_c соответственно. Проведем прямые BD и CE, пересе-

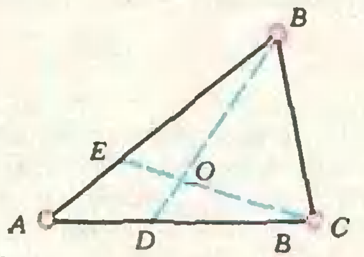


Рис. 1.

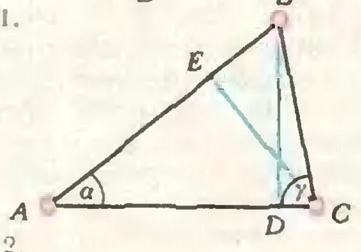


Рис. 2.

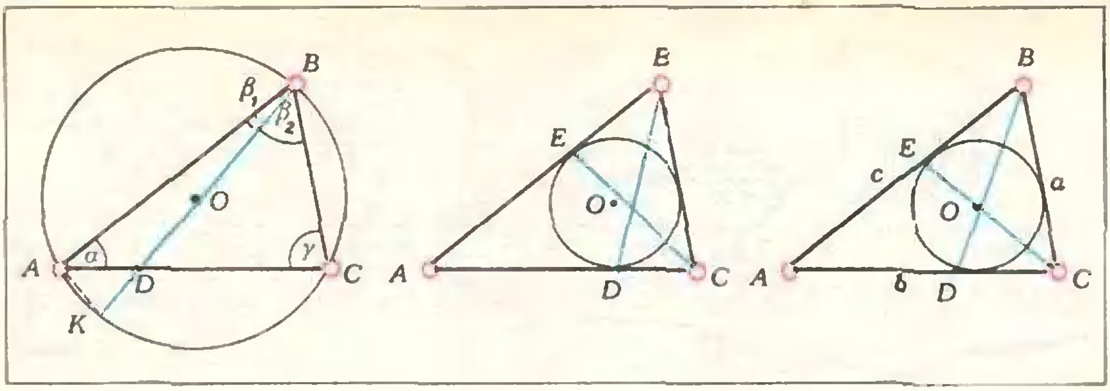


Рис. 3. Рис. 4. Рис. 5.

кающиеся внутри треугольника в точке O (рис. 1). Заметим, что для того, чтобы центр тяжести*) этих масс попал в точку O, необходимо выполнение соотношений $\frac{m_c}{m_a} = \frac{AD}{DC}$ и $\frac{m_b}{m_a} = \frac{AE}{BE}$ (докажите это). Перейдем теперь к решению задачи.

а) Пусть BD и CE — высоты в треугольнике ABC (рис. 2). Тогда

$$\frac{BD}{AD} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{BD}{DC} = \operatorname{tg}\gamma,$$

то есть

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Согласно сделанному замечанию, $\frac{m_c}{m_a} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}$ и аналогично $\frac{m_b}{m_a} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$. Значит, в вершины A, B, C треугольника ABC можно поместить, например, массы $m_a = \operatorname{tg}\alpha$, $m_b = \operatorname{tg}\beta$, $m_c = \operatorname{tg}\gamma$.

б) Пусть O — центр описанной окружности (рис. 3). Имеем:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha},$$

$$\frac{DC}{BD} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma}$$

(теорема синусов для треугольников ABD и BCD).

Поэтому

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\sin\gamma\cdot\sin\beta_1}{\sin\alpha\cdot\sin\beta_2}.$$

Треугольник BAK — прямоугольный ($\angle BAK = 90°$) и $\angle BKA = \angle BCA = \gamma$; поэтому $\sin\beta_1 = \cos\gamma$. Аналогично $\sin\beta_2 = \cos\alpha$.

Итак,

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}.$$

Учитывая замечание, получаем:

$$\frac{m_c}{m_a} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}.$$

Таким же образом

$$\frac{m_b}{m_a} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}.$$

Значит, можно взять $m_a = \sin 2\alpha$, $m_b = \sin 2\beta$, $m_c = \sin 2\gamma$.

в) Легко видеть (см. рис. 4), что $AD = p - a$, $DC = p - c$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$, поэтому

$$\frac{m_c}{m_a} = \frac{p-a}{p-c}.$$

Аналогично $AE = p - a$, $EB = p - b$, то есть

$$\frac{m_b}{m_a} = \frac{p-a}{p-b}.$$

Поэтому достаточно положить

$$m_a = \frac{1}{p-a}, \quad m_b = \frac{1}{p-b}, \quad m_c = \frac{1}{p-c}.$$

г) Так как BD — биссектриса угла B (см. рис. 5), то $\frac{AD}{DC} = \frac{c}{a}$ или $\frac{m_c}{m_a} = \frac{c}{a}$; соответственно CE — биссектриса угла C и $\frac{AE}{BE} = \frac{b}{a}$, то есть $\frac{m_b}{m_a} = \frac{b}{a}$. Поэтому можно взять $m_a = a$, $m_b = b$, $m_c = c$.

Б. Д. Гинзбург

*) О центрах тяжести см. статью М. Б. Балка, Н. А. Григорьева, Механика помогает геометрии, «Квант», 1973, № 11, с. 34—35.

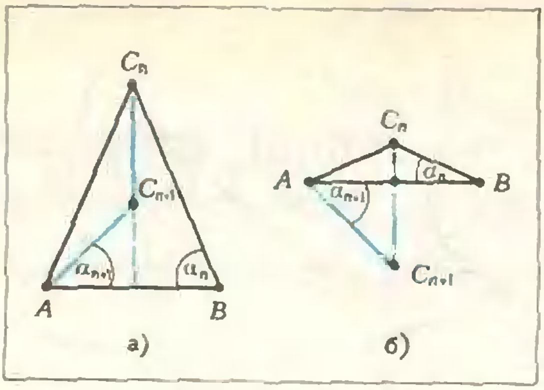


Рис. 6.

M238. *Докажите, что сумма* $C_n^1 + C_n^3\cdot 1973 + C_n^5\cdot(1973)^2 + C_n^7\cdot(1973)^3 + \ldots$ *делится на* 2^{n-1}. *(Здесь* C_n^k *— коэффициенты многочлена*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.\Big)$$

Будем решать нашу задачу по индукции. Положим

$$\gamma_n = C_n^1 + C_n^3\cdot 1973 + C_n^5\cdot(1973)^2 + \ldots$$

Имеем:

$\gamma_1 = 1$ делится на $2^{1-1}=1$;

$\gamma_2 = 2$ делится на $2^{2-1}=2$.

Предположим, что при всех $k<n$

$$\gamma_k = C_k^1 + C_k^3\cdot 1973 + \ldots$$

делится на 2^{k-1}, и докажем, что тогда γ_n делится на 2^{n-1}. Из определения чисел C_n^k сразу следует, что

$$\gamma_n = C_n^1 + C_n^3\cdot 1973 + \ldots = \frac{(1+\sqrt{1973})^n - (1-\sqrt{1973})^n}{2\sqrt{1973}}.$$

Обозначим $1+\sqrt{1973}$ через α, а $1-\sqrt{1973}$ через β.

Учитывая эти обозначения, перепишем γ_n так:

$$\gamma_n = \frac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})(\alpha+\beta)}{2\sqrt{1973}} - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})}{2\sqrt{1973}} =$$

$$= 2\gamma_{n-1} + 1972\gamma_{n-2} = 2\gamma_{n-1} + 4\cdot 493\gamma_{n-2}.$$

По предположению индукции γ_{n-1} делится на 2^{n-2}, γ_{n-2} делится на 2^{n-3}; значит, вся сумма делится на 2^{n-1} — что и требовалось доказать.

Л. Г. Лиманов

M239. *На плоскости заданы две точки A и B. Пусть C — некоторая точка, одинаково удаленная от A и B. Построим последовательность точек* $C_1 = C$, C_2, C_3, …, C_n, C_{n+1}, …, *где* C_{n+1} *— центр окружности, описанной около треугольника* AC_nB. *При каком положении точки C*

а) точка C_n *попадет в середину отрезка AB (при этом* C_{n+1} *и дальнейшие члены последовательности не определены)?*

б) точка C_n *совпадает с C?*

Пусть $\angle C_nBA = \angle C_nAB = \alpha_n$. Легко проверить (рис. 6 а, б), что для остроугольного треугольника

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n - \frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{4} < \alpha_n < \frac{\pi}{2}, \qquad (1)$$

для тупоугольного

$$\alpha_{n+1} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha_n,\quad 0 < \alpha_n < \frac{\pi}{4}. \qquad (2)$$

Это можно записать одной формулой:

$$\alpha_{n+1} = \left|2\alpha_n - \frac{\pi}{2}\right|,\quad 0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}, \qquad (3)$$

которая годится и для прямоугольного треугольника: при $\alpha_n = \frac{\pi}{4}$ получим $\alpha_{n+1} = 0$ — центр C_{n+1} попадает в середину отрезка AB.

Положим $\alpha_n = x_n\cdot\frac{\pi}{2}$ (x_n — отношение величины угла α_n к величине прямого угла). Из (3) ясно, что x_n получается из x_0 n-кратным применением отображения

$$x \to f(x) = |2x - 1|,\quad x \in [0, 1]. \qquad (4)$$

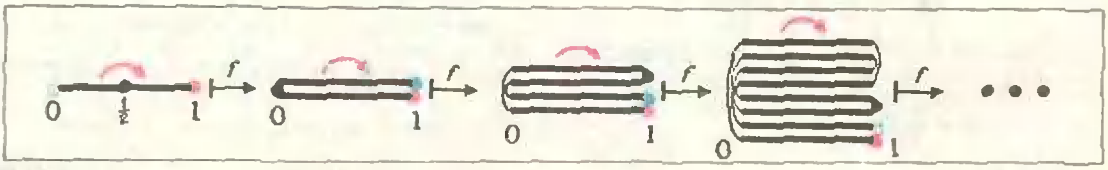


Рис. 7.

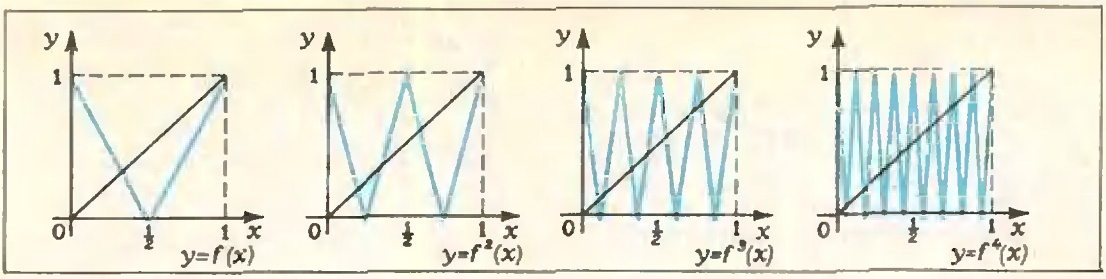


Рис. 8.

то есть

$$x_n = \underbrace{f(f(f \ldots (f(x_0)) \ldots))}_{n \text{ раз}}.$$

Заметим, что $f(0) = f(1) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Каждый из отрезков $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ отображение f растягивает вдвое и отображает на весь отрезок $[0, 1]$ (рис. 7). Ясно, что f^n (n-кратное применение f) «складывает» отрезок $[0, 1]$ уже не в 2 раза, а в 2^n раз; точки, делящие $[0, 1]$ на 2^n равных частей, f^n отображает в концы отрезка:

$$f^n\left(\frac{k}{2^n}\right) = 1, \text{ если } k = 2m, \text{ и}$$

$$f^n\left(\frac{k}{2^n}\right) = 0, \text{ если } k = 2m+1 \qquad (5)$$

(где k, m, n — целые), а каждый отрезок $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ подобно растягивает на весь $[0, 1]$. Нетрудно сообразить (рис. 8), что тогда

$$f^n(x) = 2^n\left(x - \frac{2m-1}{2^n}\right)$$

$$\text{для } x \in \left[\frac{2m-1}{2^n}, \frac{2m}{2^n}\right], \qquad (6)$$

$$f^n(x) = 2^n\left(\frac{2m+1}{2^n} - x\right)$$

$$\text{для } x \in \left[\frac{2m}{2^n}, \frac{2m+1}{2^n}\right].$$

Нам нужно будет выяснить, в каких случаях $C_{q+n} = C_q$. Для этого решим уравнение $f^n(x) = x$. У него 2^n корней:

$$x = \frac{2m-1}{2^n-1} \; (m = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}), \qquad (7)$$

$$x = \frac{2m+1}{2^n+1} \; (m = 0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}-1). \; (8)$$

Теперь уже нетрудно разобраться в том, как ведет себя последовательность

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots \qquad (9)$$

в зависимости от $x_0 = 2\alpha_0/\pi$.

1) Если x_0 иррационально, то все другие числа последовательности (9) иррациональны и отличны друг от друга. Первое легко следует из того, что все корни (7) и (8) уравнений $f^n(x) = x$ рациональны и, следовательно, равенство $f^n(x_q) = x_q$ не может выполняться при иррациональном x_0.

2) Если $x_0 = \frac{p}{2^q}$ (p и q — натуральные, p и 2^q взаимно просты), то последовательность «обрывается»: $x_{q-1} = 0$ и последующие точки C_q, $C_{q+1}, \ldots$ не определены (по формуле (4) мы в этом случае получаем $x_q = x_{q+1} = \ldots = 1$). То, что «обрыв» происходит именно при таких значениях x_0, следует из формул (5).

3) Если $x_0 = p/(2^q r)$(p, r и 2^q взаимно просты, $q \geq 0$, $p \geq 1$, $r > 1$), то последовательность (9), начиная с некоторого места, периодическая. В самом деле, как видно из (6), $x_{q+1} = \frac{t}{r}$, где t — некоторое нечетное число. Существует такое n, что $2^n - 1$ делится на r. (Этот известный факт мы докажем ниже.) Пусть $2^n - 1 = rs$ (s, конечно, нечетно). Тогда $x_{q+1} = \frac{ts}{2^n - 1}$ принадлежит множеству (7), стало быть, $x_{q+n+1} = x_{q+1}$, и тем самым $x_{l+n} = x_l$ для любого $l \geq q+1$.

Итак, последовательность

$$C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$$

периодическая тогда и только тогда, когда отношение угла α_0 к $\frac{\pi}{2}$ рационально и не имеет вид $\frac{p}{2^q}$ (в последнем случае C_{q-1} — середина отрезка AB, и последовательность обрывается).

Осталось доказать такую лемму: *для любого нечетного r найдется целое n такое,* *что* 2^n-1 *делится на* r. Напомним два доказательства:

1°. Согласно «теореме Эйлера», $a^{\varphi(r)}-1$ делится на r, если a и r взаимно просты, где $\varphi(r)$ — количество натуральных чисел, меньших r и взаимно простых с ним (см. статью С. Г. Гиндикина «Малая теорема Ферма» в «Кванте» № 10, 1972 год).

2°. Рассмотрим остатки, которые дают r чисел 2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, ..., 2^r-1 при делении на r. Если ни одно из них не делится на r, то поскольку различных остатков возможно $r-1$, какие-то два из этих чисел 2^i-1 и $2^{i+j}-1$ дают одинаковые остатки («принцип Дирихле»). Тогда их разность

$$(2^{i+j}-1)-(2^i-1)=2^{i+j}-2^i=(2^j-1)\,2^i$$

делится на r, и, следовательно, 2^j-1 делится на r.

Н. Б. Васильев

М240. *По заданному* x *значение* x^8 *можно найти за три арифметических действия:* $x^2=x\cdot x$, $x^4=x^2\cdot x^2$, $x^8=x^4\cdot x^4$, *а* x^{15} *— за пять действий: первые три — те же самые, затем* $x^8\cdot x^8=x^{16}$ *и* $x^{16}:x=x^{15}$. *Докажите, что*

а) x^{1000} *можно найти за 12 действий (умножений и делений);*

б) для любого натурального n *значение* x^n *можно найти не более чем за* $\frac{3}{2}\log_2 n+1$ *действий.*

Заметим сначала, что степени x с показателями 2, 4, 8, ..., 2^k можно вычислить за k умножений, именно: $x^2=x\cdot x$, $x^4=x^2\cdot x^2$, ..., $x^{2^k}=x^{2^{k-1}}\cdot x^{2^{k-1}}$. Отсюда следует, что $x^n=x^{2^{\log_2 n}}$ нельзя найти быстрее чем за $l=[\log_2 n]$ операций (через $[z]$ обозначена целая часть действительного числа z, то есть такое целое число m, что $m\leqslant z<m+1$).

а) Так как $2^9=512<1000<1024=2^{10}$, то есть $[\log_2 1000]=9$, то x^{1000} нельзя вычислить быстрее чем за 9 действий. С другой стороны, $x^{1000}=x^{1024}:(x^{16}\cdot x^8)$, на что потребуется 11 умножений и 1 деление. Можно доказать, что этот способ вычисления самый экономный.

Замечание. В «Кванте» № 11 за 1973 год была опубликована задача из книжки Е. А. Морозовой и И. С. Петракова, Международные математические олимпиады:

Дан ящик сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Как возможно быстрее отвесить покупателю 1 кг сахару? (Указать схему уравновешиваний.)

Несмотря на различие в формулировках, в действительности задачи М240а) и только что приведенная в точности совпадают, и теперь вы уже можете указать ответ и на этот вопрос.

б) Опишем теперь способ вычисления x^n. Он основывается на двоичном представлении $\langle n\rangle_2$ числа n.

Представим n в виде суммы

$$n=\varepsilon_l\cdot 2^l+\varepsilon_{l-1}\cdot 2^{l-1}+\ldots+\varepsilon_1\cdot 2+\varepsilon_0,$$

где ε_j — либо 0, либо 1, $0\leqslant j\leqslant l-1$, а $\varepsilon_l=1$. Тогда двоичное представление n имеет вид:

$$\langle n\rangle_2=\varepsilon_l\varepsilon_{l-1}\ldots\varepsilon_1\varepsilon_0 \qquad (*)$$

Обозначим через $E(n)$ число единиц среди цифр ε_j:

$$1\leqslant\varepsilon_l+\varepsilon_{l-1}+\ldots+\varepsilon_1+\varepsilon_0=E(n)\leqslant l+1,$$

а через $H(n)$ — число нулей, так что $H(n)=l+1-E(n)$. Для нахождения x^n вычисляем сначала многочлены x^2, x^4, ..., x^{2^l} (за l умножений). Дальнейшие вычисления зависят от величины $E(n)$.

(1) Если $1\leqslant E(n)\leqslant\frac{l+3}{2}$, то перемножим те многочлены x^{2^j}, для которых $\varepsilon_j=1$ (для этого нам потребуется $E(n)-1$ умножений); ввиду равенства $(*)$, результат равен x^n, общее же число умножений равно $l+E(n)-1$.

Но

$$l+E(n)-1\leqslant\frac{3}{2}\,l+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}\log_2 n+1.$$

(2) Если $\frac{l+3}{2}<E(n)\leqslant l+1$,

то $$H(n)\leqslant\frac{l-2}{2}.$$

Рассмотрим число $\bar n=2^{l+1}-n$. Очевидно, что $\langle n\rangle_2+\langle\bar n\rangle_2=10\ldots0$ ($l+1$ нуль) и что поэтому $E(\bar n)\leqslant H(n)+1$. Как и в случае (1), вычислим многочлен $x^{\bar n}$ за $l+E(\bar n)-1$ умножений. Затем вычислим многочлен $x^{2^{l+1}}$ (так как многочлен x^{2^l} уже найден, то на это потребуется еще одно умножение) и, наконец, многочлен $x^n=x^{2^{l+1}}:x^{\bar n}$ (одно деление). Итак, в этом случае потребовалось $l+E(\bar n)$ умножений и одно деление, то есть всего $l+E(\bar n)+1$ действий, где

$$l+E(\bar n)+1\leqslant l+H(n)+2\leqslant\frac{3}{2}\,l+1\leqslant\frac{3}{2}\log_2 n+1.$$

З а м е ч а н и е. Многочлен x^{1000} был вычислен нами способом (2). Однако существуют многочлены, для которых ни способ (1), ни способ (2) не являются наилучшими. Например, многочлен x^{170} может быть вычислен за 9 умножений (найдите такой способ сами!), хотя $\langle 170\rangle_2 = 10\,101\,010$, так что $E(170) = H(170) = 4$, $[\log_2 170] = 7$; при способе (1) нужно 10 умножений, а при способе (2) — 11 умножений и одно деление.

Э. Г. Белага

Ф243. *Почему при ярком освещении те, кто пользуется не очень сильными очками, могут читать и без очков?*

Почему для того, чтобы сфотографировать одновременно два объекта, один из которых находится дальше другого, и получить на фотопленке резкое изображение обоих объектов, обычно уменьшают диаметр отверстия объектива (объектив диафрагмируют)?

Резкое изображение предмета, которое дает хрусталик несовершенного глаза, получается не на сетчатке глаза, а перед ней, если человек близорук, или за ней, если человек дальнозорок. В обоих случаях изображение каждой точки на сетчатке глаза получается в виде расплывчатого круглого пятна, диаметр которого зависит от диаметра зрачка и от степени близорукости (или дальнозоркости) человека (рис. 9). Чем меньше диаметр зрачка, тем уже пучок лучей, создающих изображение точки, тем меньшее пятно получается на сетчатке. При ярком освещении диаметр зрачка уменьшается, и изображение букв для людей, носящих не очень сильные очки, оказывается слабо размытым. Поэтому они могут читать и без очков. Для тех же, кто пользуется сильными очками, изображение букв получается далеко от сетчатки глаза, и несмотря на небольшой диаметр зрачка, изображение букв оказывается сильно размытым, так что читать текст без очков все равно невозможно.

Аналогично объясняется увеличение глубины резкости (то есть области, которая получается резкой на фотопленке) при уменьшении диаметра отверстия объектива. Действительно, пусть мы хотим одновременно сфотографировать две точки, находящиеся на некотором расстоянии друг от друга (рис. 10). Если аппарат сфокусирован на какой-то предмет между этими двумя точками (объектив дает на фотопленке резкое изображение этого предмета), то изображение точек на фотопленке получается расплывчатым, но диаметр каждого из пятен — изображений точек — зависит от диаметра отверстия объектива, уменьшаясь при уменьшении этого диаметра.

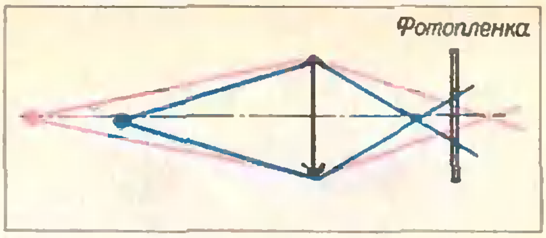


Рис. 10.

Ф244. *К двум точкам прикреплены цепочка длины l и концы двух стержней, сумма длин которых тоже равна l, а свободные концы шарнирно связаны. Чей центр тяжести находится ниже — цепочки или стержней?*

Потянув за одно из звеньев цепочки (рис. 11), ей можно придать форму стержней. При этом будет произведена работа, которая, очевидно, идет на увеличение потенциальной энергии цепочки, то есть на подъем ее центра тяжести. Так как в новом положении центр тяжести цепочки совпадает с положением центра тяжести стержней, ясно, что центр тяжести свободно висящей цепочки расположен ниже центра тяжести стержней.

Ф245. *Имеется равномерно заряженная полусфера. а) Показать, что плоскость, «закрывающая» эту полусферу, эквипотенциальна. б) Определить напряженность поля в точках этой плоскости.*

Плотность зарядов полусферы равна σ.

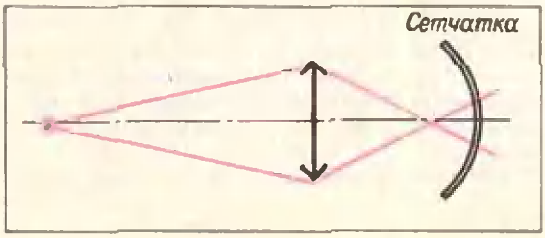


Рис. 9.

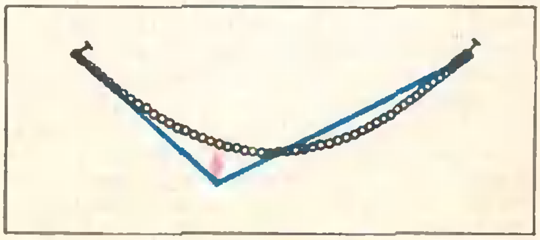


Рис. 11.

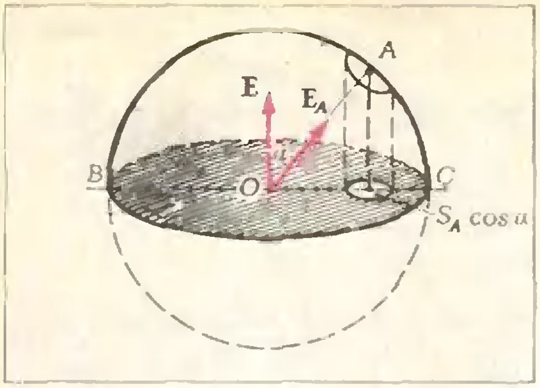


Рис. 12.

Сложим две одинаковые равномерно заряженные полусферы с равными плотностями зарядов. В этом случае мы получим равномерно заряженную сферу, внутри которой напряженность поля, как известно, равна нулю. Согласно принципу суперпозиции, однако, напряженность поля заряда сферы равна сумме напряженностей полей зарядов полусфер. Следовательно, равна нулю сумма $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ напряженностей полей зарядов полусфер. Это возможно только в том случае, когда $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2|$ и, кроме того, оба вектора $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ перпендикулярны к плоскости Π, «закрывающей» полусферу. Действительно, из симметрии ясно, что составляющие векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, параллельные этой плоскости, должны быть равными. Складываясь, они дадут нуль только в том случае, если сами равны нулю.

Итак, мы доказали, что векторы напряженности поля в точках плоскости Π перпендикулярны к этой плоскости. Это означает, что при перемещении заряда в плоскости Π не совершается работа. Следовательно, плоскость Π эквипотенциальна.

Теперь найдем напряженность поля в точках плоскости Π. Согласно принципу суперпозиции напряженность поля в точке O равна сумме напряженностей полей зарядов отдельных участков полусферы. Напряженность поля заряда участка A равна, очевидно, по абсолютной величине

$$E_A = \frac{Q_A}{R^2} = \frac{\sigma S_A}{R^2},$$

где S_A — площадь участка A (участок A — участок поверхности полусферы столь малый, что его можно считать плоским, то есть линейный размер его много меньше радиуса полусферы).

Напряженность поля в точке O равна, очевидно, сумме перпендикулярных к плоскости Π составляющих векторов полей зарядов отдельных участков полусферы. Составляющая E_A, перпендикулярная к плоскости полусферы, равна $E_A \cos\alpha$ (см. рис. 12). Следовательно, нам нужно найти сумму

$$E = \sum \frac{\sigma}{R^2} S_A \cos\alpha = \frac{\sigma}{R^2} \Sigma S_A \cos\alpha.$$

Так как $S_A \cos\alpha$ — это проекция площади участка A на плоскость Π, а сумма таких проекций площадей всех участков полусферы, очевидно, равна площади плоскости Π, то есть πR^2, то

$$E = \frac{\sigma}{R^2} \pi R^2 = \pi\sigma.$$

Мы нашли напряженность в центре плоскости Π. Нетрудно найти напряженность поля в точках окружности, которая является пересечением плоскости Π и полусферы. Так как поверхность полусферы эквипотенциальна, то силовые линии в любой точке полусферы должны быть перпендикулярны к полусфере. С другой стороны, в точках C и B они должны быть перпендикулярны плоскости Π. Одновременно и то, и другое возможно только, если напряженность поля в этих точках равна нулю.

Нахождение напряженности поля, создаваемого зарядом полусферы в других точках плоскости, требует сложных вычислений. Поле это неоднородно. Очевидно, что оно обладает симметрией относительно точки O и в каждой точке плоскости зависит от расстояния до этой точки от центра O.

Ф246. *Теплоизолированный сосуд объемом $2V$ разделен пополам тонкой перегородкой. В одной половине сосуда находится одноатомный газ с температурой T_1 и давлением p_1, в другой половине — другой одноатомный газ с давлением p_2 и температурой T_2. Найти установившуюся температуру смеси газов после того, как убрали перегородку.*

Воспользуемся законом сохранения энергии. Так как сосуд теплоизолирован, то полная энергия газов при их перемешивании не может измениться. Внутренняя энергия n молей идеального одноатомного газа равна кинетической энергии хаотического движения молекул газа:

$$U = \frac{3}{2} nRT,$$

где T — абсолютная температура газа, R — универсальная газовая постоянная. Это означает, что пока не убрали перегородку, внутренняя энергия системы была равна

$$U = \frac{3}{2} n_1RT_1 + \frac{2}{3} n_2RT_2$$

(n_1 — число молей первого газа, n_2 — число молей второго газа). После того как убрали перегородку, температура газов стала равна T, а внутренние энергии газов стали $\frac{3}{2} n_1RT$ и $\frac{3}{2} n_2RT$. По закону сохранения энергии

$$\frac{3}{2} n_1RT_1 + \frac{3}{2} n_2RT_2 = \frac{3}{2} n_1RT + \frac{3}{2} n_2RT.$$

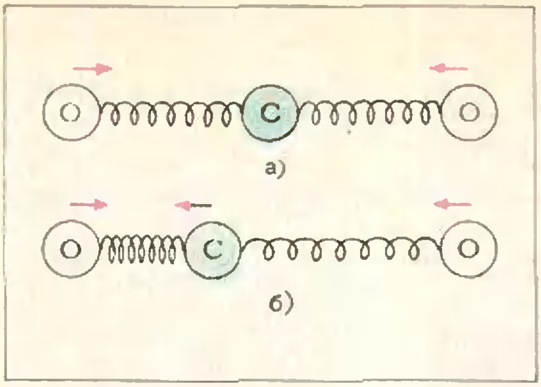


Рис. 13.

Отсюда

$$T=\frac{n_1T_1+n_2T_2}{n_1+n_2}=\frac{\dfrac{n_1}{n_2}T_1+T_2}{\dfrac{n_1}{n_2}+1}.$$

В это выражение входит отношение n_1/n_2. Чтобы найти его, запишем уравнение газового состояния для обоих газов до перемешивания:

$$p_1V=n_1RT_1;\quad p_2V=n_2RT_2.$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{T_2}{T_1}.$$

Следовательно,

$$T=\frac{T_1T_2(p_1+p_2)}{p_1T_2+p_2T_1}.$$

Ф247. *Модель молекулы углекислого газа CO_2 — три шарика, соединенные пружинками и расположенные в положении равновесия вдоль одной прямой. Такая молекула может совершать линейные колебания двух типов: а) или б) на рис. 13. Найти отношение частот этих колебаний.*

Обозначим жесткость пружинок модели молекулы k, массу шариков — атомов кислорода M и массу шарика — атома углерода m ($m/M=12/16$).

Совершая колебания типа а), оба атома кислорода колеблются синхронно относительно неподвижного атома углерода. Это связано с тем, что в силу симметрии колебаний атомов кислорода на атом углерода в любой момент действуют с обеих сторон равные по абсолютной величине и противоположно направленные силы, которые «уравновешивают» друг друга. Поэтому в случае а) атомы кислорода совершают свободные колебания, период которых равен

$$T_a=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

При колебаниях типа б) на атом углерода действуют равные по абсолютной величине силы, но направлены они в одну и ту же сторону. Если шарик — атом углерода разбить на две равные части, то ясно, что они будут колебаться как одно целое: на них всегда действуют равные силы и, следовательно, шарики-половинки в любой момент будут иметь одинаковые ускорения, скорости и координаты. Частота колебаний молекулы CO_2 равна частоте колебаний системы, состоящей из атома кислорода и половины атома углерода. Таким образом, задача сводится к определению периода колебаний соединенных пружинкой шариков массы M и $m/2$. Такие шарики колеблются около неподвижного центра масс системы. Если длина пружинки в нерастянутом состоянии равна l, то центр масс системы находится на расстоянии $l\dfrac{m}{m+2M}$ от шарика массы M. Поэтому можно считать, что шарик массы M (атом кислорода) колеблется относительно центра масс на пружинке длины

$$l_1=l\frac{m}{m+2M}.$$

Жесткость части пружинки больше жесткости целой пружинки. Так как жесткость обратно пропорциональна отношению длины этой части к длине целой пружины, то жесткость части пружинки

$$k_1=k\frac{l}{l_1}=k\frac{m+2M}{m}.$$

Период колебаний шарика массы M на пружинке жесткости k_1 равен

$$T_б=2\pi\sqrt{\frac{M}{k_1}}=2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m+2M)}},$$

а

$$\frac{T_б}{T_a}=\sqrt{\frac{m+2M}{m}}=\sqrt{1+\frac{2M}{m}}.$$

Так как $\dfrac{M}{m}=\dfrac{16}{12}=\dfrac{4}{3}$, то

$$\frac{T_б}{T_a}=\sqrt{1+\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{11}{3}}.$$

Следовательно, отношение частот

$$\frac{\nu_б}{\nu_a}=\sqrt{\frac{3}{11}}.$$

И. Ш. Слободецкий

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Энрико Ферми — физик

Возьмите любую монографию по физике, изданную в последние 20—30 лет, и вы почти наверняка встретите в ней Энрико Ферми — разработанную им теорию, предложенный им метод исследования или хотя бы физический термин. Ферми внес огромный вклад в теоретическую физику, атомную физику, физику ядра и элементарных частиц.

Более 15 лет назад был издан русский перевод книги Лауры Ферми «Атомы у нас дома» — биографии этого ученого, написанной его женой. В ней рассказывается о жизненном пути Ферми, раскрывается образ Ферми — человека, но, естественно, почти не освещается его научная деятельность. И вот наконец-то почти одновременно появились две книги о Ферми — ученом. Одна из них*) принадлежит перу Эмилио Сегре, ученика, соратника и друга Ферми, вторая**) составлена другим учеником Ферми, советским академиком Б. М. Понтекорво и его сотрудником В. И. Покровским. В обеих книгах материал преподносится, что называется, «из первых рук», и они дают достаточно полное и объективное представление о творческом пути одного из замечательных физиков атомной эры.

Перелистаем страницы этих книг.

...1915 год. Базарный день в Риме. Невысокий, коренастый четырнадцатилетний мальчик пробирается среди прилавков букинистов, разыскивая книги по физике. Итальянская физика, давшая миру Галилея и Вольта, давно уже утратила свою былую славу, преподавание этой науки в школах и университетах велось на довольно низком уровне, и влюбленному в физику Энрико Ферми оставалось одно — черпать знания из книг.

...Защитив диплом в Пизе, Ферми возвращается в Рим и сразу попадает под опеку Корбино, который был директором физической лаборатории Римского университета. Заметив выдающийся талант Ферми, Корбино помог ему получить (в 26 лет!) профессорскую кафедру в Римском университете — первую в Италии кафедру теоретической физики, специально учрежденную по этому случаю, а главное, помог собрать вокруг молодого профессора группу столь же молодых энтузиастов: Персико, Разетти, Сегре, Амальди, Понтекорво, Росси. Так возникла школа Ферми. Впоследствии эти имена, как и имена тех, кто группировался вокруг Ферми в период его жизни в США (Андерсон, Гелл-Манн, Гольдбергер, Фелд, Орир, Розенфельд, Чу, Янг), стали известны каждому физику.

...Подобно магниту Ферми всегда притягивал к себе талантливых людей. Чем же он достигал этого? Прежде всего, конечно, беспредельной влюбленностью в физику и глубоким пониманием ее. За сложными математическими построениями, за нагромождением формул Ферми умел разглядеть суть физических процессов и явлений. Вот что рассказывает Ганс Бете, один из выдающихся физиков нашего времени:

«Метод работы Ферми над теоретическими проблемами больше всего поражал меня своей простотой. Он мог проникнуть в существо любой задачи, какой бы сложной она ни казалась. Он срывал с нее покров математических усложнений и ненужного формализма. При таком подходе он мог часто не более чем за полчаса решить весьма сложную физическую задачу. Конечно, при этом не получалось математически полного решения, но когда вы расставались с Ферми после одного из таких обсуждений, уже было ясно, каким путем можно получить математическое решение».

При этом сам Ферми был хорошим математиком, способным, если нужно, произвести любые выкладки. Именно — если очень нужно. Но в своей повседневной научной деятельности он предпочитал приближенные, прикидочные расчеты и не расставался с логарифмической линейкой. Когда же появились электронно-вычислительные машины, он сразу оценил их мощь и первым среди физиков стал активно пользоваться ими.

Диапазон научных интересов Ферми был поистине колоссален. Бруно Максимович Понтекорво вспоминает, что в Римском университете Ферми читал лекции по квантовой механике, атомной физике, математической физике, термодинамике, но самым любимым у него был курс ...геофизики. Как же ему удавалось разбираться — и не по-дилетантски, а глубоко — в столь различных областях физики? Помимо выдающегося таланта, Ферми обладал еще двумя немало важными качествами: необы-

*) Сегре Э. Энрико Ферми — физик. «Мир», 1973, 324 с., ц. 1 р. 19 к.

**) Понтекорво Б., Покровский В. Энрико Ферми в воспоминаниях учеников и друзей. «Наука», 1972, 160 с., ц. 57 к.

чайным трудолюбием и систематичностью. И то, и другое проявилось уже в юности. Во время летних студенческих каникул 1919 года он исписал карандашом тетрадку в кожаной обложке: на ее 102 страницах уместился конспект всей физики от аналитической динамики Гамильтона и Якоби до электронной теории материи Лоренца, теории квантов Планка и основ радиоактивности Резерфорда. Последние заметки, оглавление и библиографические списки он написал 29 сентября, в день своего 18-летия. Любопытно, что эту тетрадку он взял с собой в Америку, где хранил наряду с другими научными записями до конца жизни.

Не полагаясь на свою феноменальную память, он составил обширную, хорошо систематизированную картотеку («моя искусственная память», — шутил Ферми), из которой, заглянув предварительно в ключ-блокнот, мог без труда извлечь любые нужные сведения: уравнения, параметры и константы, библиографические ссылки, краткие изложения чужих научных работ и докладов.

Несколько слов о работоспособности Ферми, ставшей впоследствии недосягаемым эталоном для всякого физика. В марте 1934 года он возглавил исследования по облучению атомов различных элементов незадолго до этого открытыми нейтронами. За два месяца до летних каникул испытанию подверглись практически все элементы. Затем Ферми уехал читать цикл лекций в Южную Америку, а вернувшись, возобновил работу, проверяя влияние различных материалов на поведение нейтронов. К концу 1934 года работы были практически завершены (не будь они столь интенсивными, на них понадобился бы не один год). За цикл нейтронных исследований Ферми был удостоен Нобелевской премии по физике в 1938 году.

В декабре 1938 года Ферми с женой и двумя детьми поехал в Стокгольм получать Нобелевскую премию, а оттуда отправился в Америку, решив не возвращаться больше в фашистскую Италию.

...Еще в 1934 году, изучая взаимодействие нейтронов с ураном, Ферми обнаружил неизвестные ранее радиоактивные вещества и сделал, правда, в осторожной форме, вывод, что это трансурановые элементы. Вывод оказался ошибочным, и эту ошибку Ферми не мог простить себе до конца жизни. На самом же деле обнаруженные им радиоактивные вещества, как показали спустя четыре года немецкие ученые Ган, Штрассман и Мейтнер, являлись продуктами деления ядер урана. Как только это было доказано, в умах многих ученых, в том числе и Ферми, родилась идея цепной ядерной реакции, в результате которой должно выделяться огромное количество энергии.

...Когда разразилась война в Европе, а особенно после того, как в декабре 1941 года Соединенные Штаты вступили в войну, сотни ученых, работавших в США, главным образом эмигрантов из различных стран Европы, оккупированных гитлеровской Германией, сосредоточили свои усилия над созданием атомной бомбы. И здесь оказался незаменимым Ферми. Даже среди таких выдающихся ученых как Бор, Оппенгеймер, Комптон, Вайскопф, Фейнман, Бете, он считался «оракулом», к нему обращались в самых трудных случаях.

...После окончания войны Ферми совсем отошел от атомных исследований и увлекся физикой элементарных частиц. По-прежнему много времени уделял он педагогической деятельности: читал лекции в Чикагском университете, руководил теоретическим семинаром, занимался с группой аспирантов, из которой вышли многие активно работающие ныне ученые, писал учебники. Летом 1954 года он тяжело заболел, врачи поставили страшный диагноз — рак желудка с метастазами, и Ферми понял, что жить ему осталось немного. Но и в этой тяжелейшей ситуации он сохранял спокойствие и бодрость духа и даже на больничной койке продолжал писать учебный курс квантовой механики.

Ферми умер 29 ноября 1954 года, спустя ровно два месяца после своего 53-го дня рождения...

Таким предстает перед нами Энрико Ферми со страниц этих двух книг. Разумеется, в кратком рассказе невозможно дать полное представление о Ферми — человеке и ученом. Для этого надо прочесть обе книги.

С огромным интересом читаются приложения к книге Сегре: письма Ферми к своему другу и тезке Энрико Персико, охватывающие период с 1917 по 1926 год; речь, произнесенная Ферми при вручении ему Нобелевской премии и содержащая популярное изложение работ по искусственной радиоактивности, возникающей при бомбардировке нейтронами; запись последней речи Ферми, в которой живо и непосредственно, с большим юмором рассказано об истории ядерных исследований вплоть до создания первого ядерного реактора, и, наконец, более строгий доклад на ту же тему. Все эти материалы, как и большая часть основного текста обеих книг, вполне доступны школьникам старших классов, увлекающимся физикой. Прочтя эти книги, они познакомятся с выдающимся ученым, который по праву входит в плеяду создателей физики XX века, а также с одной из замечательных и драматических страниц в истории физики.

И. Зорич

ИНФОРМАЦИЯ

Физико-математической школе при МИИТе — 5 лет

27 февраля 1974 года в Московском ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени институте инженеров железнодорожного транспорта (МИИТе) состоялась методическая конференция, посвященная 5-летию работы физико-математической школы МИИТа *). В конференции приняли участие сотрудники ФМШ МИИТа — студенты и преподаватели института — и гости — представители физико-математических школ МВТУ, МЭИ, института атомной энергии им. И. В. Курчатова, Вечерней математической школы при Московском математическом обществе, редакции журнала «Квант», факультета «Юный железнодорожник» Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта.

«Вечерние физико-математические школы, созданные на общественных началах при ведущих вузах нашей страны,— явление исключительное в мировой педагогике,— сказал научный руководитель школы, заведующий кафедрой «Прикладная математика» МИИТа, профессор Л. Е. Садовский.— За рубежом меня спрашивали, что особенно характерно для пейзажа Москвы и других советских городов. И я отвечал — школы, масса школ, учебных заведений. Социализм порождает огромную тягу к знаниям, всеобщий интерес к достижениям современной науки, и вечерние ФМШ играют большую роль в деле воспитания молодого поколения». Секретарь комитета ВЛКСМ МИИТа В. И. Чеков вручил грамоты лучшим студентам-преподавателям школы В. Цветкову, В. Залкинду, А. Маринбах и другим, и пожелал коллективу школы дальнейших успехов. Представители старейшей московской физико-математической школы — ФМШ МВТУ — вручили ФМШ МИИТа приветственный адрес.

За пять лет ФМШ МИИТа удалось добиться значительных успехов. Сложился свой собственный стиль, накоплен большой педагогический и методический опыт.

Поэтому доклады наших преподавателей вызвали огромное количество вопросов. Наибольший интерес вызвали сообщения об обзорном курсе физики и специальном курсе элементарной математики, которые читаются в нашей школе для 10-классников. Обсуждение методики преподавания продолжалось более 5 часов. Затем гости посетили лекции и занятия в группах ФМШ, беседовали со школьниками.

Основная цель, которую ставит перед собой коллектив нашей ФМШ,— это раскрыть школьникам красоту математики и физики, помочь им полюбить эти науки, определить свое призвание. Разрыв между требованиями в средней школе и на приемных экзаменах в вузе, о котором так много дискутируют, состоит не в том, что от школьника в вузе требуют каких-то дополнительных знаний. Просто помимо знаний, предусмотренных обычной школьной программой, абитуриент должен обладать достаточно высокой культурой мышления.

Именно развитию мышления, тому, что принято называть «общей математической культурой», и посвящена в основном работа

*) Официально днем рождения ФМШ МИИТа считается 17 января 1969 года, когда ректор института профессор Ф. П. Кочнев утвердил «Временное положение о ФМШ» (фактически школа начала работу в 1968 году — см. статью А. Л. Садовского «Физико-математическая школа при МИИТе», «Квант», 1972, № 1).

Научный руководитель ФМШ МИИТа профессор Л. Е. Садовский на конференции.

Участники конференции

Директор Вечерней математической школы при Московском математическом обществе А. И. Орлов передает привет ФМШ МИИТа от ВМШ при ММО

Выступает директор ФМШ МЭИ Б. Ф. Реутов

Старейший преподаватель ФМШ МИИТа А. И. Сеславин рассказывает об обзорном курсе по математике для десятиклассников

Дискуссия на докладе зам. председателя Совета ФМШ МИИТа по учебной работе В. И. Каплуна

нашей школы. Даже на занятиях, посвященных «конкурсным» темам, для нас главное — это довести до учащихся общие соображения, лежащие в основе раздела, нарисовать общую картину. Лишь после того, как это удалось сделать, мы переходим к деталям. При этом основная работа по освоению техники ложится на самого учащегося. В школе разработана система специальных заданий, которые учащиеся выполняют дома, а потом сдают на проверку. Задание обычно состоит из 15—20 задач разного плана и разного уровня сложности. Однако даже в самых простых примерах всегда содержатся некоторые подчас неожиданные для школьника трудности. Например, в задание по графикам и элементарным функциям включены и такие простые примеры, как *построить график функции* $y = x^{[x]}$ ([ ] — целая часть), и такие, как *построить область*

$$\min\{\sin 2\pi x, \cos 2\pi y\} \leqslant 1/2,$$

в которых для полного решения необходимо провести маленькое исследование.

Каждый год в начале сентября наша школа проводит очередной набор. У нас часто спрашивают: «А какой, примерно, конкурс в Вашей школе?» И ответ: «Никакого» — обычно вызывает удивление. В школе работает достаточно преподавателей и студентов, чтобы обеспечить занятия практически в любом числе групп, поэтому для *каждого* поступающего независимо от остальных собеседование дает ответ: принять или не принять. По результатам вступительного собеседования мы принимаем учащихся 8-х, 9-х и 10-х классов школ Москвы и Московской области.

Программа трехгодичного потока (8—10 класс) рассчитана на планомерное развитие математической культуры, глубокое усвоение различных разделов математики и физики. Программа двухгодичного потока (9—10 класс) практически совпадает с программой трехгодичного, но проходится за 2 года, поэтому требования к девятиклассникам на собеседовании немного выше. Ученикам десятого класса приходится осваивать нашу программу всего за один год, поэтому отбор десятиклассников самый строгий. Программа нашей школы включает в основном неэлементарные разделы элементарной и элементарные разделы высшей математики. Курс математики, как, впрочем, и курс физики, состоит из отдельных тем-этюдов. Каждая тема разбирается обычно на протяжении 3—5 занятий. Тема начинается с поставки отдельных задач и разбора интуитивных и практических соображений, лежащих в ее основе, а завершается доказательством каких-либо важных положений, разбором дальнейших перспектив применения рассмотренных методов. При этом на лекциях разбираются лишь принципиальные моменты, а основная работа проводится на семинарах, где по каждой теме предлагаются циклы задач. Большинство тем изложены в книгах серий «Библиотека математического кружка», «Популярные лекции по математике», но некоторые родились у нас. Например, в этом году девятиклассникам была предложена тема, связанная с традиционным кружковским разделом «выпуклые фигуры», которая была посвящена, однако, придуманной одним из преподавателей нашей школы Г. Кацманом теореме о том, что с некоторой точки зрения четыре ножки для стула с круглым сиденьем — оптимальный вариант. Курс физики читается в основном с теоретическим уклоном. При этом с использованием математического аппарата минимальной сложности часто удается довести рассмотрение до самых современных результатов. Это относится, например, к термодинамике, теории фазовых переходов, теории относительности.

В основном изучение элементарной, «школьной» математики построено так, чтобы в ней не оставалось мест, метко названных французским математиком Ламперти «появлением кролика из шляпы». Огромное внимание уделяется тонкостям в основных определениях, построению контрпримеров. Большой популярностью у преподавателей и учащихся ФМШ пользуются серии вопросов и задач по элементарной математике, составленные старейшим работником нашей школы А. Сеславиным.

В заключение для тех, кто заинтересовался нашим рассказом, приведем типовые вопросы прошлогоднего собеседования.

8 класс

1. Доказать, что если $a, b, c > 0$ и $a^2 + b^2 = c^2$, то $a^3 + b^3 < c^3$.

2. В записи числа $11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2 = 399 * 6800$ потеряна одна цифра, обозначенная «звездочкой». Не вычисляя 11!, определить эту цифру.

9 класс

1. Решить уравнение:

$$x^2 + y^2 + |x - y| = x + y - \frac{1}{2}.$$

2. Две окружности с радиусами R_1 и R_2 касаются друг друга внешним образом в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB. Найти угол ACB.

3. Доказать, что $n^3 - n$ делится на 6 при натуральных n.

4. Оценить вес земной атмосферы. (Для справок. Радиус Земли $R_З \approx 6400$ *км*, площадь поверхности шара радиуса R равна $4\pi R^2$.)

10 класс

1. Решить уравнение $\sin^8 x + \sin 2x = 1$.

2. Найти площадь сечения, проведенного в кубе $ABCDA'B'C'D'$ через точки M, K, T, лежащие соответственно на ребрах AD ($AM = MD$), CD ($CK = KD$) и BB' ($3BT = TB'$).

В. И. Каплун

Конференция по работе со школьниками

В. А. Волков
А. Л. Лихтарников
И. С. Рубанов

В феврале этого года студенты и маститые математики, занимающиеся внеклассной работой со школьниками, собрались на свою первую конференцию. 172 делегата из 29 университетов и 26 педагогических вузов страны приехали в Ленинград, чтобы обсудить работу юношеских, летних, заочных и вечерних математических школ, кружков, проведение олимпиад. Конференция проводилась комитетом ВЛКСМ и Советом по вопросам среднего образования математико-механического факультета Ленинградского университета.

Половину делегатов конференции составляли студенты. Это одна их характерных черт работы вузов со школьниками: студенты, сами недавние школьники, становятся первыми помощниками ребят в важном и трудном деле выбора профессии. Наиболее широко такого рода общественная деятельность распространена на математических факультетах ряда вузов нашей страны. И это понятно, так как занятия математикой в школьные годы полезны не только для будущих математиков. Они повышают и общую культуру, прививают школьнику навыки логического мышления. Кроме того, знание основ математики в наши дни помогает творчески работать во многих других областях.

Программа конференции была насыщенной. Несмотря на то, что конференция работала целых 6 дней (с 31 января по 5 февраля 1974 года), заседания в отдельные дни продолжались (с перерывами) с 9 часов утра до 8 часов вечера.

В 95 докладах и кратких сообщениях преподаватели, студенты и научные работники рассказали о работе школ.

С большим интересом делегаты выслушали доклады члена-корреспондента АН СССР Д. К. Фаддеева, члена-корреспондента АПН СССР В. Г. Болтянского, профессора С. В. Смирнова, профессора И. М. Яглома, доцента М. Б. Балка (фото внизу).

Участники конференции присутствовали на математическом бое между командами спецшколы-интерната № 45 при ЛГУ и физико-математической школы № 30 г. Ленинграда. В один из вечеров была организована встреча с членами редколлегии журнала «Квант». Они рассказали делегатам о работе редакции. Далее прошел оживленный обмен мнениями о работе журнала.

На конференции работали 5 секций (ЮМШ, ЗМШ, ЛМШ и лекторских групп, организации работы со школьниками в вузе и олимпиад). На заседании каждой секции после подробного обсуждения принималось решение, в котором содержалась оценка конкретной формы работы и предложения заинтересованным организациям по ее совершенствованию. Конференция приняла также общее решение, содержащее предложения по совершенствованию форм и методов работы со школьниками.

В решении, в частности, отмечается, что внешкольная работа по математике со школьниками страны ведется с начала тридцатых годов. Она получила особенно большое распространение в последнее десятилетие и в настоящее время охватывает сотни тысяч учащихся. Эта работа позволяет осуществлять постоянное руководство занятиями школьников математикой, оказывать эффективную помощь учителям (особенно учителям из сельской местности, рабочих поселков и небольших городов) в организации внеклассных занятий, кружков и факультативов.

Конференция отметила, что участие в работе со школьниками комсомольцев вузов и научно-исследовательских учреждений — реальный вклад в выполнение постановлений партии и правительства о повышении уровня подготовки учащихся общеобразовательных школ, в проводимый ЦК ВЛКСМ поход под девизом «Комсомол — сельской школе». Только многотысячная армия студентов и аспирантов может помочь органам народного образования вовлечь массы школьников во внеклассную работу, развить индивидуальные способности каждого школьника.

Конференция обратилась с просьбой в Комитет по печати при Совете Министров СССР увеличить выпуск специальных изданий, связанных с внеклассной работой со школьниками.

На заключительном пленарном заседании было принято обращение к студентам, аспирантам и преподавателям вузов и к сотрудникам научно-исследовательских учреждений шире развернуть работу со школьниками по всем предметам и дисциплинам. Работа конференции показала, что имеются все предпосылки для дальнейшего совершенствования и расширения этой работы как у математиков, так и у работников других областей науки и техники.

Задачи математического боя между школой № 30 и школой-интернатом № 45

1. Построить треугольник, две высоты которого лежат на данных прямых, а центр описанной окружности находится в данной точке.

2. Квадрат 6×6 нужно заполнить 12 плитками, k из которых имеют форму , а $(12 - k)$ — форму . При каких k это возможно?

3. На ребрах $A'D'$ и $C'D'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ выбирают две точки K и M так, что плоскость KDM касается шара, вписанного в куб. Доказать, что величина двугранного угла при ребре $B'D$ тетраэдра $B'DKM$ не зависит от выбора точек K и M.

4. На плоскости лежит правильный восьмиугольник и круг. Восьмиугольник можно поворачивать и симметрично отражать относительно любой его стороны. Доказать, что с помощью таких операций можно добиться, чтобы центр восьмиугольника попал в данный круг.

5. Построить треугольник по центрам вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей.

6. В каждой вершине правильного k-угольника поставлена буква A или $Б$. Известно, что для каждой вершины можно указать такое число p, меньшее $k/2$, что слово из p последовательных букв, начинающееся с этой вершины, совпадает со словом из p последовательных букв, оканчивающимся перед этой вершиной (слова читаются по часовой стрелке). Доказать, что k-угольник можно повернуть так, чтобы каждая буква совместилась с такой же буквой.

7. Окружность радиуса R, касающаяся внешним образом окружности радиуса $r < R$, катится без скольжения по этой окружности, а окружность радиуса $R + r$ касается внутренним образом окружности радиуса r и также катится по ней без скольжения. На каждой из катящихся окружностей выбрано по точке. Доказать, что описываемые этими точками траектории конгруэнтны.

8. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждый из них был под ударом не более чем одного из остальных?

9. В прямоугольном параллелепипеде из одной вершины проведены три диагонали граней. Доказать, что сумма углов между этими диагоналями равна $180°$.

10. Дан выпуклый многоугольник. Доказать, что если через каждую тройку последовательных вершин провести окружность, то наибольшая из этих окружностей содержит многоугольник.

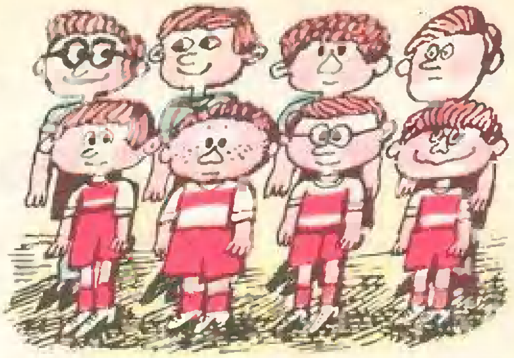
11. Функция f определена на множестве $R \setminus \{0, 1\}$. Для каждого x выполнено равенство $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$. Найти все такие функции f.

12. Вытекает ли из неравенств $abc > c^2 + ad$ и $a_1b_1c_1 > c^2 + a_1d_1$ неравенство $(a + a_1)(b + b_1)(c + c_1) > (c + c_1)^2 + (a + a_1)(d + d_1)$, если $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 > 0$?

13. Назовем *квартетом* четверку клеток на клетчатой бумаге, центры которых лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. Какое наибольшее число квартетов, не имеющих общих клеток, можно разместить в квадрате 25×25?

«Квант» для младших школьников

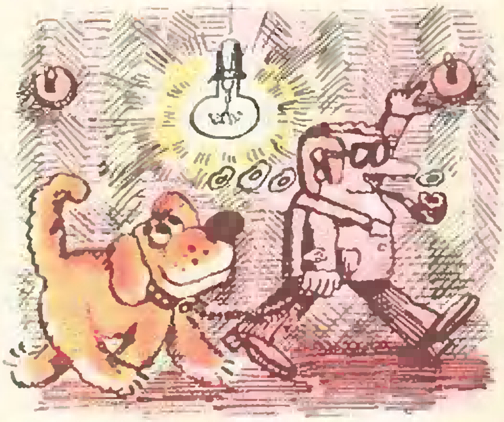
Задачи



1. Восьмиклассники построены в шеренгу. Перед каждым из них стоит семиклассник, который ниже его ростом. Доказать, что если шеренги семиклассников и восьмиклассников построить по росту, то по-прежнему каждый восьмиклассник будет выше стоящего перед ним семиклассника.

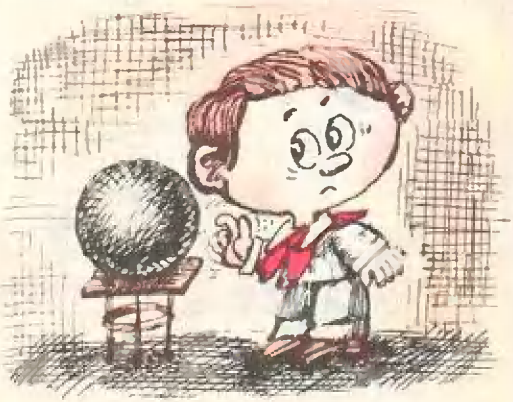
2. Мальчик поймал в реке рыбу. Ему захотелось тут же хотя бы приблизительно определить массу этой рыбы. Как он может это сделать, если у него есть ровная прочная удочка и в своих запасах он нашел буханку хлеба массой в 1 *кг*?

3. Доказать, что n^2+n+1 не делится на 1974 ни при каком целом n.



4. Длинный коридор имеет электропроводку. Человек, войдя с одного конца коридора, включил лампу, а пройдя коридор — выключил ее. Какова схема проводки, если лампочку можно включать и выключать из обоих концов коридора?

5. Дана шахматная доска размером 100×100 клеток. Две клетки назовем *соседними*, если они имеют общую сторону. В клетках этой доски стоят целые числа, причем числа, стоящие в соседних клетках, отличаются не более чем на 20. Доказать, что на доске найдется три одинаковых числа.



6. Имеется алюминиевый шарик объемом 20 $см^3$ и массой 18 *г*. Как определить, сплошной он или внутри него есть воздушная полость? Можно ли каким-нибудь способом выяснить, находится эта полость в центре шара или около его поверхности?

Рисунки Э. Назарова

Нет ли другого доказательства?

В. К. Смышляев, А. П. Савин

Если спросить у человека, давно окончившего среднюю школу, помнит ли он теорему Пифагора, то в подавляющем большинстве случаев ответ будет: «А как же! В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов *равна квадрату гипотенузы». Другие* теоремы забываются, а эта нет. Она поражает нас своей красотой и изяществом и надолго остается в памяти.

Но вспомнить доказательство этой теоремы сможет далеко не всякий, а если и вспомнит, то не доказательство из учебника Киселева, принадлежащее Евклиду, а какое-нибудь более изящное, например, индийское, состоящее из рисунка (рис. 1) и подписи «смотри».

Очень изящно и доказательство, основанное на теореме о секущей и касательной, проведенных к окружности из одной точки (рис. 2). По упомянутой теореме $AB^2 = AC \cdot AD$ или $a^2 = (c + b)(c - b)$, то есть $a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательств теоремы Пифагора очень много. Еще в 1876 году в Москве была издана книга Ю. Ф. Виппера «Сорок пять доказательств теоремы Пифагора». Конечно, она уже является библиографической редкостью, *но книгу В. Литцмана «Теорема Пифагора»* (М., Физматгиз, 1960) найти еще не слишком трудно. В ней дано довольно полное собрание различных доказательств этой теоремы. И, конечно, мы рекомендуем посмотреть статью В. Н. Березина «Теорема Пифагора», «Квант», 1972, № 3, и одноименную заметку в «Кванте» № 7 за 1974 год.

Является ли теорема Пифагора уникальной в смысле обилия ее доказательств? Оказывается, нет. Очень многие фундаментальные теоремы доказаны десятками способов.

Чем это вызвано? Почему математики передоказывают уже известные факты? На наш взгляд, можно выделить три основные причины.

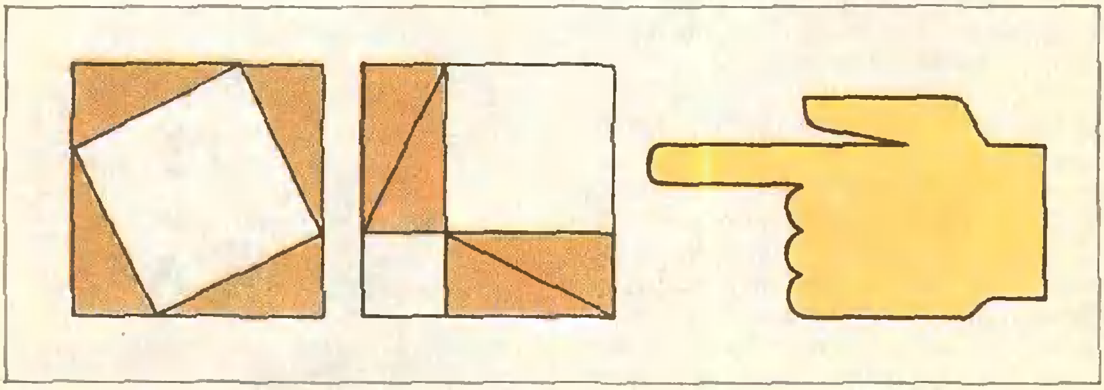


Рис. 1.

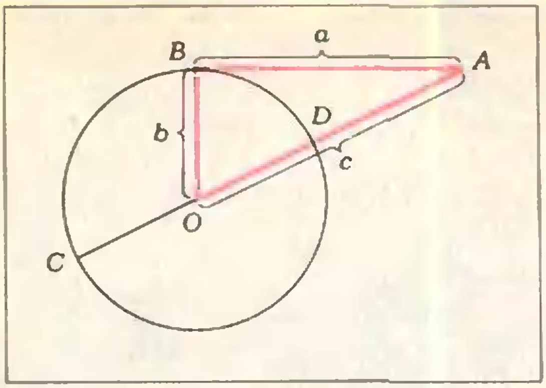


Рис. 2.

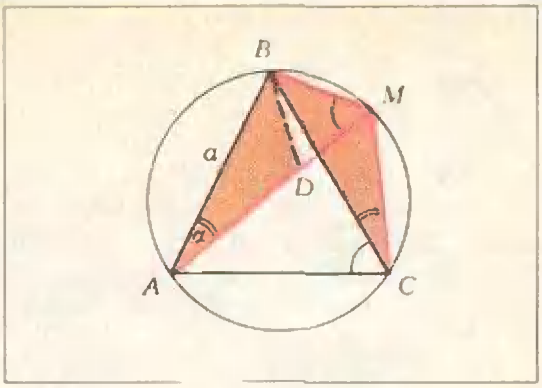


Рис. 3.

Первая — педагогическая. Обычно первые доказательства теорем весьма громоздки и неуклюжи, но затем, когда стало известно, что данный факт верен, появляются новые, более короткие и изящные доказательства, которые легче усваиваются, более наглядны.

Вторая причина — стремление установить связь данной теоремы с другими известными фактами, определить ее положение в сложном сооружении, именуемом математикой. Примером этому может служить обнаруженная нами связь теоремы о касательной и секущей с теоремой Пифагора.

И третья причина — открытие новых фактов, для которых данная теорема является очевидным следствием. Один из таких примеров мы разберем в конце статьи. А сейчас разберем несколько доказательств другой, уже не столь знаменитой теоремы.

Пусть M — точка, лежащая на окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника ABC. Тогда длина наибольшего из отрезков MA, MB, MC равна сумме длин остальных двух.

Приведем довольно изящное геометрическое решение. А именно, пусть MA — наибольший из указанных отрезков (рис. 3). Отложим от точки M отрезок $MD = MB$. Далее заметим, что угол AMB равен $60°$, как опирающийся на ту же дугу, что и угол ACB. Отсюда следует, что треугольник BMD — равносторонний, после чего уже совсем нетрудно установить, что треугольники ABD и BMC равны, и, следовательно, $MA = AD + DM = MC + MB$.

А вот тригонометрическое доказательство. Обозначим длину стороны треугольника ABC через a, а угол BAM через α. Выразим указанные отрезки через a и α с помощью теоремы синусов:

$$MB = \frac{a \sin \alpha}{\sin 60°}, \qquad MC = \frac{a \sin(60°-\alpha)}{\sin 60°},$$

$$MA = \frac{a \sin(60°+\alpha)}{\sin 60°}.$$

Найдем сумму MB и MC:

$$MB + MC = \frac{a}{\sin 60°} \times$$

$$\times (\sin \alpha + \sin(60° - \alpha)) =$$

$$= \frac{a \cos(30° - \alpha)}{\sin 60°} = \frac{a \sin(\alpha + 60°)}{\sin 60°}.$$

Сравнив полученный результат с величиной MA, получим утверждение теоремы.

Заметим, что тригонометрия является очень сильным аппаратом для решения геометрических задач, причем ее применение переводит задачу из геометрического русла в алгебраическое.

И еще одно замечание. Аппарат тригонометрии основан на ряде геометрических теорем, поэтому неправомерно доказательство таких теорем применением тригонометрии. Например, «доказательство» теоремы Пифагора: $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, откуда $a^2 + b^2 = c^2\ (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = c^2$, не может быть признано доказательством, поскольку тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ само доказывается с помощью теоремы Пифагора.

Приведем еще одно доказательство нашей теоремы, основанное на теореме Птолемея: *произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон этого четырехугольника.*

Применим эту теорему к четырехугольнику $ABMC$. Тогда имеем: $MA \times \times BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$, и, так как $AB = BC = AC$, то $MA = MB + MC$. Таким образом, рассматриваемый факт является следствием теоремы Птолемея.

В заключение повторим: доказал теорему — подумай, нет ли другого доказательства. Такой подход поможет привести в систему Ваши математические знания, приучит отыскивать разные подходы к решению задач, находить среди них наиболее естественные и продуктивные. И, поверьте, Вы испытаете громадное удовлетворение, получив красивое и своеобразное доказательство. Именно здесь математика вплотную соприкасается с искусством.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1974, № 7)

1. Обозначить первые два числа, стоящие в первой строке квадрата, через a и b, а первое число во второй строке через c и сумму магического квадрата через s. После этого можно найти все остальные числа в квадрате и доказать, что s делится на 3.

2. Намагниченная иголка может отталкиваться от магнита, ненамагниченная всегда притягивается.

3. Оля должна ставить нолики симметрично крестикам Саши, если, конечно, она не может выиграть одним ходом.

4. Свинцовый.

5. Число кусков бумаги имеет вид $1 + 11k + 7l$ (k — число разрываний бумаги на 12 кусков, l — на 8 кусков). Получить 60 кусков нельзя. Легко указать наборы k и l, при которых получаются числа кусков от 61 до 67, а далее надо увеличивать l на единицу.

2	2	3	0	0	4	4
2	5	4	4	0	1	1
6	1	5	4	4	0	0
3	2	6	6	3	3	5
1	5	5	6	4	3	0
1	1	5	2	6	0	0
3	2	5	1	2	2	6
6	4	3	6	3	5	1

6	6	0	6	6	0	0
4	5	2	6	6	5	1
4	4	5	5	4	3	3
0	5	1	4	1	3	2
2	5	2	6	1	1	1
3	1	5	3	4	2	2
3	2	6	0	0	0	2
5	3	3	4	0	1	4

К кроссворду

(см. «Квант», 1974, № 7)

По горизонтали:
2—8 медиана; 10—16 теорема; 18—25 критерий; 33—40 дедукция; 43—50 интеграл; 55—58 круг, 77—83 функция.

По вертикали:
1—42 вектор; 19—68 радикал; 29—62 центр; 2—30 метр; 45—73 точка; 47—80 график; 57—75 угол; 8—67 абсцисса; 50—76 линия.

К задачам «Домино—пасьянс»

(см. «Квант», 1974, № 6)

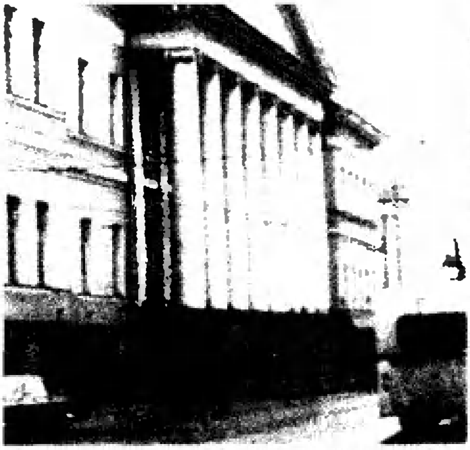
См. рисунок. Указание. В первой задаче есть лишь одно место, где может стоять кость 4 : 2, аналогичными рассуждениями находятся места остальных костей.

Корректор *Т. С. Вайсберг*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15 «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/V-74 г. Подписано в печать 20/VI-74 г. Заказ 962 Бумага 70×100$^{1}/_{16}$. Физ. печ. л. Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,63 Тираж 360 365 экз. Т-11282 Цена 30 коп.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Конференция по работе со школьниками

Эта конференция проходила в феврале 1974 года в Ленинграде. Подробно о ней рассказано на с. 59—60.

● Здание матмеха ЛГУ, в котором проходила конференция.

● Решение задачи математического боя рассказывает ученик 10 класса ФМШ при ЛГУ С. Фомин. Придирчивый оппонент — М. Гусаров (школа № 30 Ленинграда).

● Команда ФМШ при ЛГУ получает высший балл!

● Обсуждение журнала «Квант». «Это — прекрасный журнал,— говорят участники конференции. — Мы хотим, чтобы он стал еще лучше, чтобы «Квант» читали в каждой школе.»

● Аудитории матмеха ЛГУ с трудом вместили участников конференции, желающих присутствовать на обсуждении журнала «Квант».


Надо пройти через ворота в центр лабиринта так, чтобы, сложив числа на пройденных воротах, набрать сумму 75
6
35
40
2
75
22
31
11
30
28
39
37
15
21
23
18